

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
Univerzitní studijní programy
Katedra automatizační techniky a řízení

Diplomová práce

Študent: Bc. Jakub Trška
Vedúci diplomovej práce: prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc.

Ostrava 2014

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
Univerzitní studijní program
Katedra automatizační techniky a řízení

Návrh spojitého stavového řízení

Continuous State-Space Control Design

Študent: Bc. Jakub Trška
Vedúci diplomovej práce: prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc.

Ostrava 2014

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Univerzitní studijní programy
Katedra automatizační techniky a řízení

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Jakub Trška**
Studijní program: **N3943 Mechatronika**
Studijní obor: **3906T006 Mechatronické systémy**
Téma: **Návrh spojitého stavového řízení
Continuous State-Space Control Design**

Zásady pro vypracování:

1. Popište základní kanonické tvary stavových matematických modelů lineárních spojitých jednorozměrových i mnohorozměrových dynamických podsystemů, jejich vlastnosti a transformace na ně.
2. Podrobně popište různé přístupy k návrhu stavového regulátoru a pozorovatele.
3. Navrhněte a simulačně ověřte pro zvolené jednorozměrové a mnohorozměrové dynamické podsystemy stavové řízení s pozorovatelem.
4. Zhodnoťte dosažené výsledky.

Seznam doporučené odborné literatury:

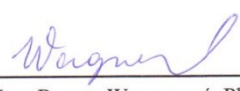
BALÁTEĚ, J. Automatické řízení. Praha: Nakladatelství BEN, 2003, 654 s. ISBN 80-7300-020-2
CHEN, Ch. T. Analog and Digital Control Systems Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods. New York – Oxford: Oxford University Press, 1993, ISBN 978-0-19-531046-7
STREJČ, V. Stavová teorie lineárního diskrétního řízení. Praha: Academia, 1978
ŠVARC, I., MATOUŠEK, R., ŠEDA, M. & VÍTEČKOVÁ, M. Automatické řízení. Brno: Akademické nakladatelství CERM, VUT v Brně, 2011, ISBN 978-80-214-4398-3
ŠTECHA, J. & HAVLENA, V. Teorie dynamických systémů. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1993. ISBN 80-01-00941-6
VÍTEČKOVÁ, M. & VÍTEČEK, A. Základní kanonické tvary stavových modelů jednorozměrových lineárních dynamických systémů. In Principia Cybernetica 2005a. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 7. – 9. 9. 2005, s. 237-245. ISBN 80-248-0773-4.
VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. Návrh stavového řízení u jednorozměrového lineárního dynamického podsystemu. In Principia Cybernetica 2005b. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 7. – 9. 9. 2005, s. 247-255. ISBN 80-248-0773-4.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

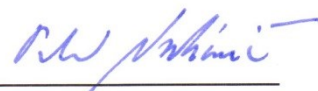
Vedoucí diplomové práce: **prof. Ing. Miluše Vítečková, CSc.**

Datum zadání: 13.12.2013

Datum odevzdání: 19.05.2014


doc. Ing. Renata Wagnerová, Ph.D.
vedoucí katedry




prof. Ing. Petr Noskievič, CSc.
prorektor pro studium

Prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě

.....

podpis studenta

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména §35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a §60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk diplomové práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠBTUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnou licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě :

.....
Plné jméno studenta

Bc. Jakub Trška
Zbeziarska 296/6
Horné Srnie, 914 42
Slovakia

ANOTÁCIA DIPLOMOVEJ PRÁCE

Trška, J. *Návrh spojitého stavového řízení : Diplomová práce*. Ostrava : VŠB – Technická univerzita Ostrava, Univerzitní studijní programy, Katedra automatizační techniky a řízení 2014, 77s. Vedoucí práce: Vítečková, M.

Cieľom tejto práce je priblíženie témy návrh spojitého stavového riadenia. V úvode práce sú popísané základné kanonické tvary stavových matematických modelov lineárnych spojitých dynamických podsystémov a ich vlastností, pričom zvlášť kapitola je venovaná návrhu stavového regulátora a pozorovateľa. Následne je pre zvolené dynamické podsystémy navrhnuté stavové riadenie, priebehy stavových veličín ako i výstupy uzavretého systému riadenia sú znázornené v príslušných grafoch. Zvolený dynamický podsystém je simulačne overený pomocou programu Matlab – Simulink.

KLÚČOVÉ SLOVÁ

Stavové riadenie, kanonické tvary, Luenbergerov pozorovateľ, stavový regulátor.

ANNOTATION OF MASTER THESIS

Trška, J. *Continuous State-Space Control Design : Master Thesis*. Ostrava : VŠB – Technical University of Ostrava, Study programs of the university, Department of Control System and Instrumentation, 2014, 77p. Thesis head: Vítečková, M.

The main goal of this project is to approach the topic – the Continuous State-Space Control Design. In the introduction we describe the canonical forms of state mathematical models of linear continuous dynamical subsystems and their properties, especially, there is a chapter dedicated to the state controller and observer. Subsequently, there are state control designed for the selected dynamic subsystems, processes of state-space variables as well as the outputs of closed system control that are represented in the respective graphs. The selected subsystem is verified in simulation using the program Matlab-Simulink.

KEY WORDS

State space control, canonical forms, Luenberger observer, state space controller.

Obsah

Zoznam použitých skratiek a symbolov	8
1. Úvod.....	10
2. Základné kanonické tvary stavových matematických modelov	11
2.1 Stavový model	11
2.2 Základné kanonické tvary.....	17
2.3 Jordanov kanonický tvar.....	23
2.4 Kanonické tvary mnohorozmerových systémov	25
3. Prístupy k návrhu stavového regulátora a pozorovateľa	31
3.1 Pozorovateľ stavu systému tvorený modelom systému.....	31
3.2 Luenbergerov asymptotický pozorovateľ	32
3.3 Návrh stavového regulátora.....	39
4. Príklady:	45
4.1 Príklad 1.....	45
4.2 Príklad 2.....	50
4.3 Príklad 3.....	55
4.4 Príklad 4.....	60
4.5 Príklad 5.....	66
5. Záver.....	75
Zoznam použitej literatúry:	76

Zoznam použitých skratiek a symbolov

A	- štvorcová stavová matica dynamiky (systému) rádu n
A_c	- štvorcová stavová matica riadenia rádu n
A_{co}	- štvorcová stavová matica riaditeľnosti rádu n
a^l	- vektor koeficientov charakteristického mnohočlenu pozorovateľa dimenzie n
A_L	- štvorcová stavová matica dynamiky pozorovateľa rádu n
A_o	- štvorcová stavová matica pozorovania rádu n
A_{ob}	- štvorcová stavová matica pozorovateľnosti rádu n
b	- vektor vstupov dimenzie n
B	- matica vstupov ($n \times s$)
b_L	- vektor vstupov pozorovateľa dimenzie n
C	- matica výstupov ($p \times n$)
c	- vektor výstupov dimenzie n
c_L	- vektor výstupov pozorovateľa dimenzie n
c_m	- konštanta motora
D	- koeficient tlmenia
d	- konštanta prevodu (prevádza vstup priamo na výstup)
det	- determinant
diag	- diagonála
e	- relatívna radiálna excentricita
g	- tiažové zrýchlenie
$G(s)$	- prenos systému
G_{wy}	- prenos riadenia
i_a	- prúd kotvy
J_m	- moment zotrvačnosti
K	- koeficient tuhosti
k	- korektor dimenzie n
l	- vektor korekcie stavu pozorovateľa dimenzie n
L_a	- celková indukčnosť obvodu kotvy
M	- hmotnosť
m	- moment motora
m_l	- záťažový moment
$N(s)$	- charakteristický mnohočlen systému

$N_L(s)$	- charakteristický mnohočlen pozorovateľa
$N_w(s)$	- charakteristický mnohočlen regulačného obvodu
p_i	- póly pozorovateľa
Q_{co}	- je matica riaditeľnosti dimenzie $(n \times n \cdot s)$
Q_{ob}	- je matica pozorovateľnosti dimenzie $(n \cdot p \times n)$
r	- polomer
\mathbf{r}	- stavový regulátor dimenzie n
R_a	- celkový odpor kotvy
rank	- hodnosť matice
T	- symbol transpozície
T_t	- transformačná matica rádu n
\mathbf{u}	- vektor vstupov dimenzie s
$U(s)$	- Laplaceov obraz vstupného vektora \mathbf{u}
u_a	- napätie kotvy
u_e	- indukčné napätie
\mathbf{x}	- vektor stavových premenných
\mathbf{X}_t	- transformovaný stavový model
\mathbf{y}	- vektor výstupov dimenzie p
$Y(s)$	- Laplaceov obraz výstupného vektora \mathbf{y}
α	- uhol natočenia hriadeľa
ε	- vektor odchýlky
Φ	- magnetický tok
λ	- rýchlostný pomer strednej obvodovej rýchlosti oleja
Ω	- uhlová rýchlosť
Ω_k	- kritická hodnota uhlovej rýchlosti
“^”	- strieškou sú značené asymptotické odhady odpovedajúcich premenných
c	- index riadenia
co	- index riaditeľnosti
o	- index pozorovania
ob	- index pozorovateľnosti

1. Úvod

Jednou z metód teórie automatického riadenia, ktorá je vhodná najmä pri riešení mnoho rozmerových systémov a v optimálnom riadení je stavová teória systému. Táto teória vychádza z toho, že priebeh procesov v dynamickom systéme nie je závislý iba na vstupnom pôsobení, ale zároveň i na predchádzajúcom vývoji procesu, ktorý sa v systéme odráža na jeho okamžitom vnútornom stave. Pre popis systému v stavovom priestore sa používa maticová forma zápisu, ktorá má nesporné výhody pre číselné riešenia na počítačoch a zároveň zachováva prehľadnosť zápisu a riešení i pre mnoho rozmerové systémy. Pokiaľ sú stavové veličiny priamo merateľné, alebo aspoň jednoducho definovateľné fyzikálne veličiny, zostáva zachovaná i súvislosť medzi matematickým popisom a fyzikálnou realitou. Pokiaľ je však voľba stavových veličín podmienená zvláštnymi okolnosťami, napr. zjednodušenie matíc stavového priestoru, tak aby sa čo najviac zjednodušil číslcový výpočet, potom sú stavové veličiny často definované zložito ako lineárne kombinácie merateľných alebo definovaných veličín systému.

Práca je rozdelená na päť hlavných častí, kde prvá je úvod. V druhej časti sa nachádza stavový popis pre jednorozmerové i mnohorožmerové systémy, následne sú popísané základné kanonické tvary stavových matematických modelov ako sú kanonický tvar riaditeľnosti, pozorovateľnosti, kanonický tvar riadenia a pozorovania, Jordanov kanonický tvar. Tretia kapitola je zameraná na návrh stavového regulátora a pozorovateľa. V štvrtej časti sa nachádzajú ukážkové príklady pre jednorozmerové systémy, ktoré sú doplnené o blokovú schému a grafický výstup daného systému pomocou programu Matlab-Simulink, štvrtý príklad sa zaoberá riadením jednosmerného motora s cudzím konštantným budením. V piatom prípade sa zaoberá návrhom stavového riadenia pre mnohorožmerový dynamický systém, konkrétne stabilitou rotora uloženého v klzných ložiskách pri rýchlobežných rotačných strojoch. V poslednej časti sa nachádza zhrnutie výsledkov spolu s návrhom ďalšieho možného postupu.

2. Základné kanonické tvary stavových matematických modelov

U lineárneho systému môže byť štruktúra stavového modelu dosť nepriehľadná a z matic stavovej formulácie nejde zistiť bez ďalších transformácií dôležité informácie. Preto boli zavedené určité usporiadania matic stavovej formulácie charakterizované minimálnym naplnením nenulovými prvkami a zviditeľnením niektorých užitočných informácií. Týka sa to hlavne matice \mathbf{A} , ktorá nesie v stavovej formulácii svojimi vlastnými číslami najdôležitejšie informácie o dynamike a charaktere chovania systému. Tieto takzvané kanonické usporiadania matice majú svoj rád uľahčujúci nie len zapamätanie, ale i priamu konštrukciu z vonkajšieho popisu. Býva rôzne pomenovaná a zavádzaná v niekoľkých nevýznamných alternatívach usporiadania, napr. transponovaná a netransponovaná. Zásadnejší rozdiel predstavuje požiadavka na informácie, ktoré sú potrebné k zostaveniu kanonickej štruktúry stavového modelu. Potom môžeme hovoriť o kanonických štruktúrach využívajúcich a zviditeľňujúcich koeficienty charakteristického polynómu, ktoré predstavujú štruktúry Frobeniovho typu, alebo kanonických štruktúrach Jordanovho typu ukazujúce priamo korene charakteristického polynómu, čiže vlastných čísiel matice \mathbf{A} [Švarc, Šeda, Vítečková, 2007; Štecha, Havlena 1999; Balátě, 2003].

2.1 Stavový model

Jednorozmerové systémy

Majme lineárny dynamický systém, ktorého matematický model má v stavovom vyjadrení tvar:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t),\end{aligned}\tag{2.1a}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = [c_{11} \quad c_{12} \quad \cdots \quad c_{1n}],\tag{2.1b}$$

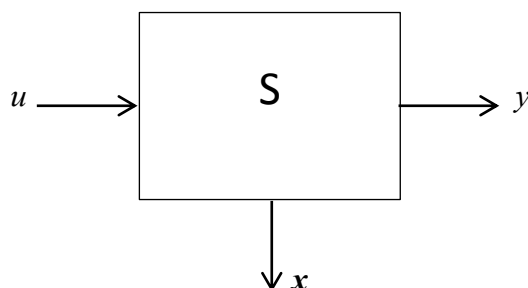
kde $\mathbf{x}(t)$ - je stavový vektor (stav) dimenzie n , $y(t)$ - výstupná premenná, $u(t)$ - vstupná premenná, \mathbf{A} - štvorcová stavová matica dynamiky (systému) rádu n , \mathbf{b} - vektor vstupov dimenzie n , \mathbf{c} - vektor výstupov dimenzie n , d - konštanta prevodu (prevádza vstup priamo na výstup), T - symbol transpozície.

V ďalšom texte nebude v stavových rovniciach uvádzaný argument t , tj.:

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}, \quad y(t) \rightarrow y, \quad u(t) \rightarrow u.\tag{2.2}$$

V prípade jednorozmerových lineárnych dynamických systémov sú vektory u a y jednorozmerové, tj. jedná sa o skaláry. Vlastnosti jednorozmerových systémov sú najčastejšie

popísané pomocou diferenciálnych rovníc popri prípade prenosmi. Počet stavových veličín x_1, x_2, \dots, x_n je závislý na ráde diferenciálnej rovnice [Vítečková, Víteček, 2005].



Obr. 2.1 Jednorozmerový lineárny dynamický systém

Vnútrotný popis umožňuje získať všetky čiastkové stavy x_i určujúce stavový vektor \mathbf{x} . U jednorozmerového spojitého lineárneho systému vonkajší popis v časovej oblasti má najčastejšie tvar lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientmi

$$a_n y^n + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^m + \dots + b_1 u' + b_0 u \quad \text{pre } a_n = 1, \quad (2.3)$$

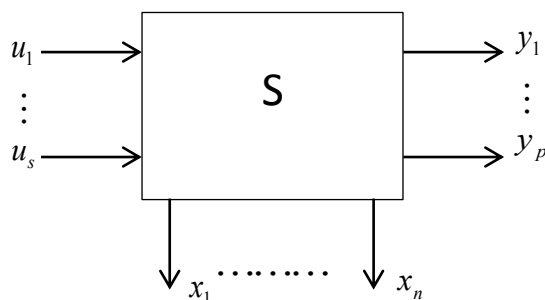
alebo odpovedajúci prenos

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad \text{pre } a_n = 1, \quad (2.4)$$

za predpokladu splnenia nulových počiatočných podmienok.

Mnohorozmerové systémy

Doposiaľ sme sa zaoberali stavovým modelom u jednorozmerových systémov a teda systémov s jedným vstupom a jedným výstupom. Systémy s viacerými vstupmi a výstupmi sa nazývajú mnohorozmerové, často sa stretávame so skratkou MIMO (multi input multi output).



Obr. 2.2 Mnohorozmerový lineárny dynamický systém

Majme lineárny dynamický systém, ktorého matematický model má v stavovom vyjadrení tvar:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u},\end{aligned}\tag{2.5a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1s} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{ps} \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.5b}$$

Mnohorozmerový lineárny dynamický systém má v stavovom vyjadrení matematického modelu tvar (2.5a), pričom rozmer stavovej matice \mathbf{A} je $n \times n$, matica vstupov \mathbf{B} nadobudne rozmer $n \times s$, matica výstupov \mathbf{C} nadobudne rozmer $p \times n$ a matica prevodu \mathbf{D} nadobudne rozmer $p \times s$, \mathbf{x} - je stavová premenná dimenzie n , \mathbf{y} - výstupná premenná dimenzie p , \mathbf{u} - vstupná premenná dimenzie s [Balátě, 2003].

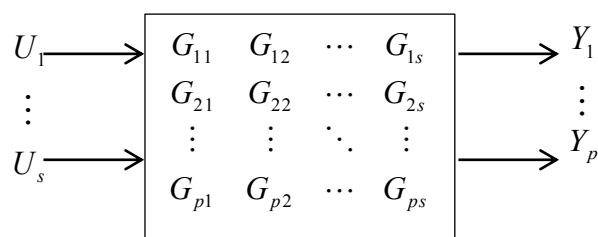
Určenie prenosovej matice systému zo stavového modelu

Prenosová matica $\mathbf{G}(s)$ určuje vzťah medzi vektorom obrazov výstupov a vektorom obrazov vstupov lineárneho systému, má tvar:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s).\tag{2.6}$$

$\mathbf{Y}(s)$ – Laplaceov obraz výstupného vektora \mathbf{y} o rozmere p , $\mathbf{U}(s)$ – Laplaceov obraz vstupného vektora \mathbf{u} o rozmere s , $\mathbf{G}(s)$ - prenosová matica typu $p \times s$.

Prvkami prenosovej matice $\mathbf{G}(s)$ sú prenosy medzi jednotlivými vstupmi a výstupmi obr. 2.3.



Obr. 2.3 Prenosová matica mnohorozmrového systému

Jednotlivé prvky $G_{ij}(s)$ prenosovej matice $\mathbf{G}(s)$ vyjadrujú prenos medzi i -tou výstupnou veličinou a j -tou vstupnou veličinou, sú definované pomocou vzťahu:

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} \quad \text{pre} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, s \end{matrix} \quad (2.7)$$

Pre vyjadrenie prenosovej matice systému zo stavového modelu, musíme vyeliminovať vektor stavových veličín $\mathbf{X}(s)$. Nasledujúci postup platí iba pre plne riaditeľné a pozorovateľné systémy [Balátě, 2003].

Pomocou Laplaceovej transformácie matematického modelu (2.5a) dostaneme:

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s), \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Za predpokladu nulových počiatočných podmienok $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, môžeme prvú z transformovaných rovníc (2.8) upraviť na tvar:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (2.9)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matica a znej určíme obraz stavu

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s). \quad (2.10)$$

Stav $\mathbf{X}(s)$ dosadíme do obrazu rovnice výstupu (2.8) a dostaneme

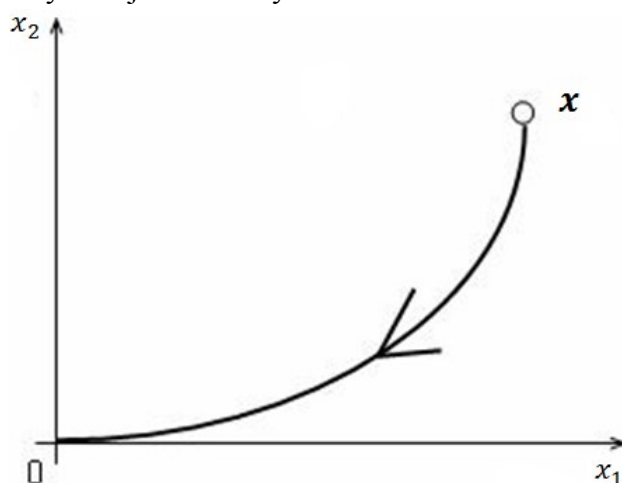
$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s). \quad (2.11)$$

Pri porovnaní rovníc (2.6) a (2.11), vidíme že prenosová matica systému $\mathbf{G}(s)$ má tvar:

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \quad (2.12)$$

Riaditeľnosť

Stav \mathbf{x} lineárneho systému je riaditeľný, pokiaľ existuje taký vstup $u(t)$, ktorý za konečný čas prevedie tento stav do počiatku (do nulového stavu). Pokiaľ sú všetky stavy systému riaditeľné, hovoríme že systém je riaditeľný.

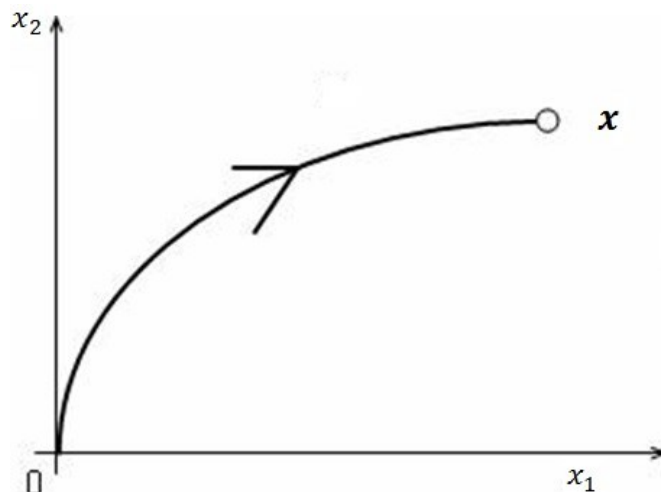


Obr. 2.4 Schematické znázornenie riaditeľnosti [Švarc, Šeda, Vitečková, 2007]

Dosiahnuteľnosť

Stav x lineárneho systému je dosiahnuteľný, pokiaľ existuje taký vstup $u(t)$, ktorý za konečný čas prevedie počiatočný stav systému $x(t_0)=0$ do žiadaného stavu x . Pokiaľ sú všetky stavy systému dosiahnuteľné, hovoríme, že systém je dosiahnuteľný (obr. 2.5) [Švarc, Šeda, Vitečková, 2007].

Pri dosiahnuteľnosti teda vychádzame z nulového počiatočného stavu a pýtame sa na existenciu riadenia $u(t)$ s uvedenými vlastnosťami.



Obr. 2.5 Schematické znázornenie dosiahnuteľnosti [Švarc, Šeda, Vitečková, 2007]

U spojitých systémoch obe vlastnosti splývajú (dosiahnuteľnosť = riaditeľnosť).

Pri jednorozmerových systémoch a predpoklade, že systém (2.1) je riaditeľný [Strejc, 1978; Kaczorek, 1988], platí že determinant matice riaditeľnosti Q_{co} sa nerovná nule, tj.:

$$\det Q_{co}(A, b) \neq 0, \quad (2.13)$$

kde Q_{co} je štvorcová matica riaditeľnosti rádu n daná vzťahom:

$$\det Q_{co}(A, b) = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \quad (2.14)$$

Pre mnohorozmerové systémy Q_{co} nie sú štvorcové matice, ale nadobúdajú rozmer $n \times n \cdot s$ a je nutné definovať riaditeľnosť pre hodnotu matice.

$$\text{rank } Q_{co} = n, \quad (2.15)$$

kde Q_{co} je matica riaditeľnosti daná vzťahom:

$$\det Q_{co}(A, B) = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (2.16)$$

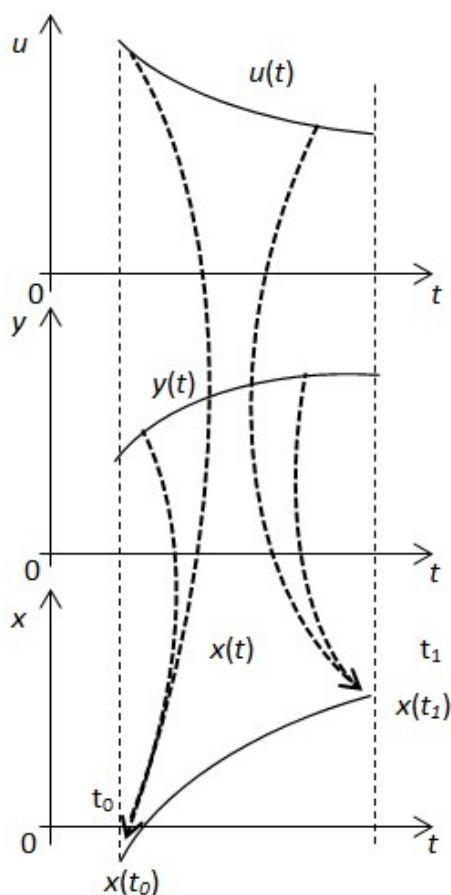
Pozorovateľnosť

Systém je pozorovateľný, keď zmeraním vstupu a výstupu na konečnom časovom intervale je možno určiť hodnotu stavu systému na počiatku merania. Pozorovateľnosť lineárneho

stacionárneho spojitého systému zaručuje, že zmeraním vstupu a výstupu systému na ľubovoľnom nenulovom časovom intervale $t_0 \leq t \leq t_1$ môžeme vypočítať počiatočný stav systému $x(0)$ [Švarc, Šeda, Vítečková, 2007].

Rekonštruovateľnosť

Systém je rekonštruovateľný, keď zmeraním vstupu a výstupu na konečnom časovom intervale je možno určiť hodnotu stavu systému na konci merania. Definícia rekonštruovateľnosti je u spojitých systémov prakticky totožná s pozorovateľnosťou a preto stačí jedno kritérium pre oba pojmy. Oba pojmy sú schematicky znázornené na obr. 2.6. [Švarc, Šeda, Vítečková, 2007].



Obr. 2.6 Schematické znázornenie pozorovateľnosti a rekonštruovateľnosti [Švarc, Šeda, Vítečková, 2007]

Pri jednorozmerových systémoch a predpoklade, že systémy (2.1) je pozorovateľný [Vítečková, Víteček 2005], platí že determinant matice pozorovateľnosti Q_{ob} sa nerovná nule, tj.:

$$\det Q_{ob}(A, c^T) \neq 0, \quad (2.17)$$

Q_{ob} je štvorcová matica pozorovateľnosti rádu n daná vzťahom:

$$\det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = [\mathbf{c}, \mathbf{A}^T \mathbf{c}, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c}]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Pre mnohorozmerné systémy \mathbf{Q}_{ob} nie je štvorcová matice, ale nadobúda rozmer $p \cdot n \times n$ a je nutné definovať pozorovateľnosť pre hodnotu matice.

$$\text{rank } \mathbf{Q}_{ob} = n, \quad (2.19)$$

kde \mathbf{Q}_{ob} je matica pozorovateľnosti daná vzťahom:

$$\det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Stabilizovateľnosť a detekovateľnosť

Systém je stabilizovateľný v tom prípade, ak celá jeho nestabilná časť je obsiahnutá v jeho dosiahnuteľnom priestore. Je zrejmé že pokiaľ je systém dosiahnuteľný alebo stabilný, tak je zároveň i stabilizovateľný. Pri stabilizovateľnom systéme je jeho neriaditeľná časť asymptoticky stabilná. Obdobne môžeme o systéme povedať, že je detekovateľný, pokiaľ všetky jeho nestabilné stavy sú pozorovateľné a teda pokiaľ je systém pozorovateľný alebo stabilný, potom je zároveň i detekovateľný. Pri detekovateľnom systéme je jeho nepozorovateľná časť asymptoticky stabilná.

2.2 Základné kanonické tvary

Ak sa zavedie regulačná štvorcová transformačná matica \mathbf{T}_t rádu n vzťahom:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_t \mathbf{x}_t, \quad (2.21)$$

potom môže byť stavový model (2.1) transformovaný zo stavového priestoru \mathbf{X} do nového stavového priestoru \mathbf{X}_t , tj. vznikne transformovaný stavový model

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{b}_t u, \\ y &= \mathbf{c}_t^T \mathbf{x}_t + du, \end{aligned} \quad (2.22)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{T}_t^{-1} \mathbf{x}, \\ \mathbf{A}_t &= \mathbf{T}_t^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_t, \\ \mathbf{b}_t &= \mathbf{T}_t^{-1} \mathbf{b}, \\ \mathbf{c}_t^T &= \mathbf{c}^T \mathbf{T}_t, \end{aligned} \quad (2.23)$$

stavové matice systému \mathbf{A} a \mathbf{A}_t majú rovnaké charakteristické mnohočleny i rovnaké vlastné čísla a teda sú si podobné a platí:

$$\begin{aligned} N(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_t) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{T}_t^{-1} \mathbf{A}_t \mathbf{T}_t) = \det[\mathbf{T}_t^{-1} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{T}_t] = \\ &= \det \mathbf{T}_t^{-1} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det \mathbf{T}_t = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Kanonický tvar riaditeľnosti a pozorovateľnosti

Ak sa použije pre transformáciu matica riaditeľnosti (2.13), tj.

$$\mathbf{T}_{co} = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}), \quad (2.25)$$

potom na základe vzťahov (2.22) a (2.23) sa dostane (index t je treba nahradiť indexom co) kanonický tvar riaditeľnosti [Vítečková, Víteček, 2005]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{co} &= \mathbf{A}_{co} \mathbf{x}_{co} + \mathbf{b}_{co} u, \\ y_{co} &= \mathbf{c}_{co}^T \mathbf{x}_{co} + du, \end{aligned} \quad (2.26a)$$

kde

$$\mathbf{A}_{co} = \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \mathbf{A} \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.26b)$$

$$\mathbf{b}_{co} = \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \mathbf{b} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]^T, \quad (2.26c)$$

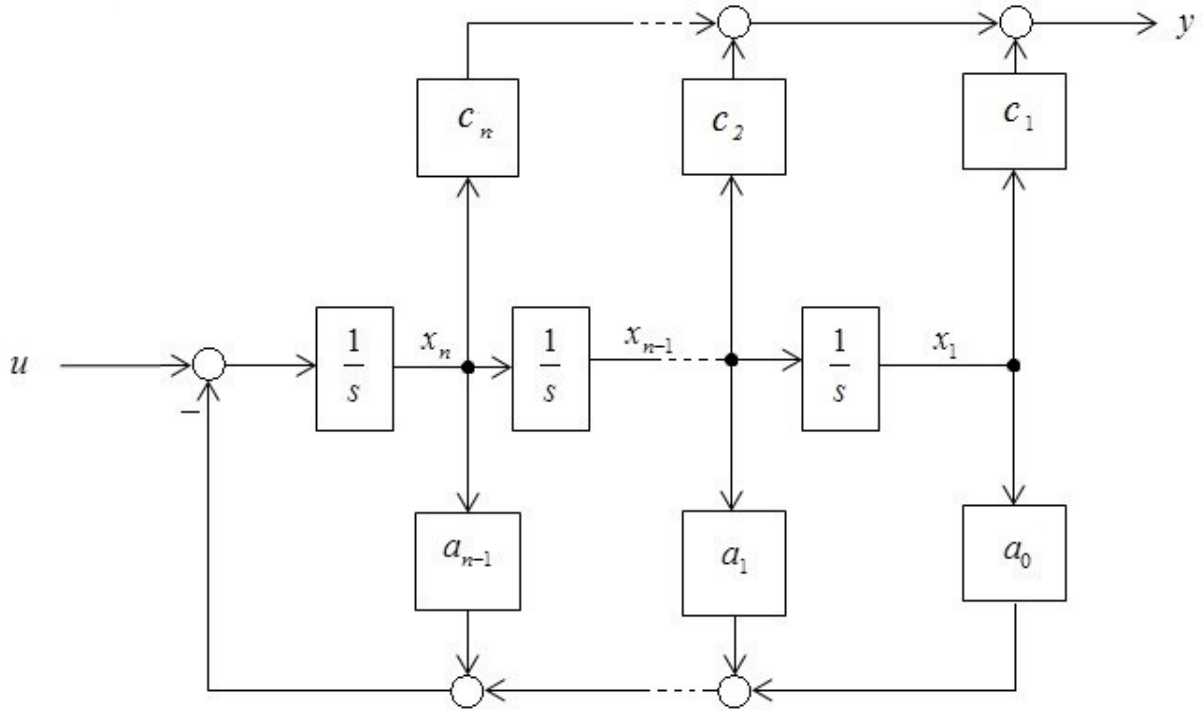
$$\mathbf{c}_{co}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{n-1} \ c_n]. \quad (2.26d)$$

Koeficienty v poslednom stĺpci stavovej matice \mathbf{A}_{co} sú záporné koeficienty charakteristického mnohočlena systému (2.1) i (2.26), tj.

$$N(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{co}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0. \quad (2.27)$$

Matica riaditeľnosti systému s matematickým modelom v kanonickom tvare riaditeľnosti (2.26) je vždy matica jednotková, tj.

$$\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}_{co}, \mathbf{b}_{co}) = \mathbf{I} \Rightarrow \det \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}_{co}, \mathbf{b}_{co}) = 1. \quad (2.28)$$

Obr. 2.7 Kanonický tvar riaditeľnosti, pre $d=0$

Ak sa použije ako transformačná matica inverzná matica pozorovateľnosti (2.18), tj.

$$\mathbf{T}_{ob} = \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T), \quad (2.29)$$

potom na základe vzťahov (2.22) a (2.23) sa dostane (index t je potrebné nahradiť indexom ob) kanonický tvar pozorovateľnosti [Vítečková, Víteček, 2005]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{ob} &= \mathbf{A}_{ob} \mathbf{x}_{ob} + \mathbf{b}_{ob} u, \\ y_{ob} &= \mathbf{c}_{ob}^T \mathbf{x}_{ob} + du, \end{aligned} \quad (2.30a)$$

kde

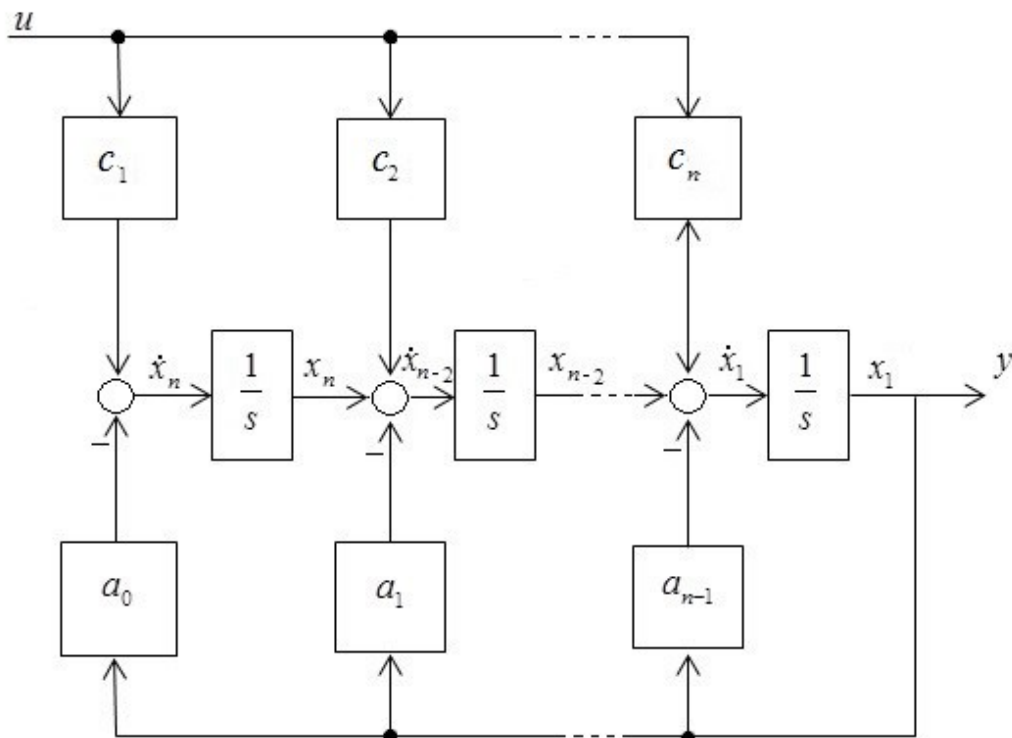
$$\mathbf{A}_{ob} = \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) \mathbf{A} \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.30b)$$

$$\mathbf{b}_{ob} = \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) \mathbf{b} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{n-1} \quad c_n]^T, \quad (2.30c)$$

$$\mathbf{c}_{ob}^T = \mathbf{c}_{ob}^T \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0]^T. \quad (2.30d)$$

Matica pozorovateľnosti systému s matematickým modelom v kanonickom tvare pozorovateľnosti (2.30) je vždy matica jednotková, tj.

$$\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}_{ob}, \mathbf{c}_{ob}^T) = \mathbf{I} \Rightarrow \det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}_{ob}, \mathbf{c}_{ob}^T) = 1. \quad (2.31)$$

Obr. 2.8 Kanonický tvar pozorovateľnosti, pre $d=0$

Na základe vzájomného porovnania vzťahov medzi (2.26) a (2.30) môžeme povedať, že medzi kanonickými tvarmi riaditeľnosti a pozorovateľnosti platí dualita, tj.

$$A_{ob} = A_{co}^T, \quad b_{ob} = c_{co}, \quad c_{ob}^T = b_{co}^T. \quad (2.32)$$

Kanonický tvar riadenia a pozorovania

Pre transformačnú maticu

$$T_c = Q_{co}(A, b)Q_{co}^{-1}(A_c, b_c), \quad (2.33)$$

kde

$$Q_{co}^{-1}(A_c, b_c) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

na základe vzťahov (2.22) a (2.23) sa dostane (index t je potrebné nahradiť indexom c) kanonický tvar riadenia [Vítečková, Víteček, 2005]

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + b_c u, \\ y_c &= c_c^T x_c + d u, \end{aligned} \quad (2.35a)$$

kde

$$A_c = T_c^{-1} A T_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.35b)$$

$$b_c = T_c^{-1} b = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T, \quad (2.35c)$$

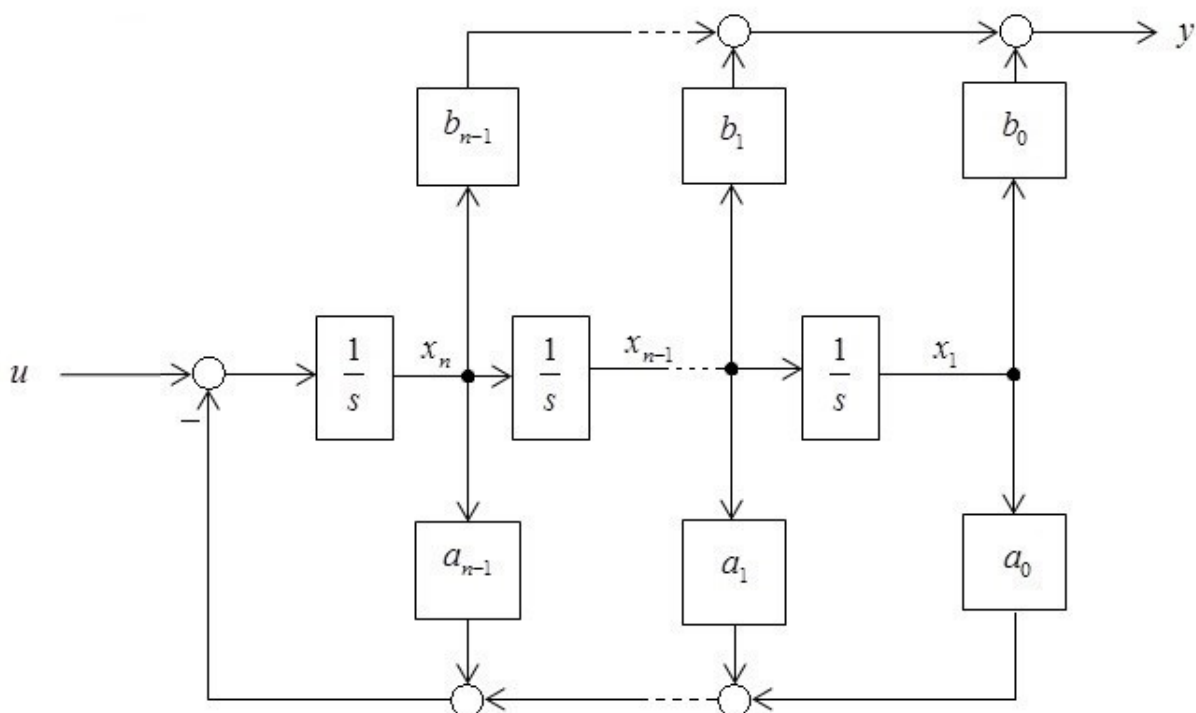
$$c_c^T = c^T T_c = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n-2} \ b_{n-1}]. \quad (2.35d)$$

Môžeme vidieť, že štvorcová matica (2.34) je inverznou maticou k matici riaditeľnosti kanonického tvaru riadenia (2.35)

$$Q_{co}(A_c, b_c) = [b_c, A_c b_c, \dots, A_c^{n-1} b_c], \quad (2.36)$$

pre ktorú platí

$$|\det Q_{co}(A_c, b_c)| = 1 \quad (2.37)$$



Obr. 2.9 Kanonický tvar riadenia, pre $d=0$

Vzhľadom k predpokladu riaditeľnosti a pozorovateľnosti systému (2.1) môžeme určiť jeho prenos

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = c^T (sI - A)^{-1} b + d = c_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c + d = \\ &= \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} + d, \end{aligned} \quad (2.38)$$

z ktorého môžeme vidieť, že vektor (2.35d) je daný koeficientmi čitateľa zlomku v prenose systému (2.38). Posledný riadok matice A_c sú koeficientmi charakteristického mnohočlena systému (2.1), a teda i (2.35), tj.

$$N(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (2.39)$$

Výhodnejšie určenie prenosu systému (2.38), bez invertovania môže byť na základe vzťahu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + d. \quad (2.40)$$

Veľmi dôležitý je fakt, že vzhľadom k špecifickej štruktúre matice (2.34), ju môžeme zostaviť iba na základe znalostí koeficientov charakteristického mnohočlena systému [viz (2.27) alebo (2.39)], tj. bez predchádzajúcich znalostí kanonického tvaru riadenia (2.35) [Vítečková, Víteček, 2005].

Pre transformačnú maticu

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T), \quad (2.41)$$

kde

$$\mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c), \quad (2.42)$$

na základe vzťahov (2.22) a (2.23) sa dostane (index t je potrebné nahradiť indexom o) kanonický tvar pozorovania

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_o &= \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o + \mathbf{b}_o u, \\ y &= \mathbf{c}_o^T \mathbf{x}_o + du, \end{aligned} \quad (2.43a)$$

kde

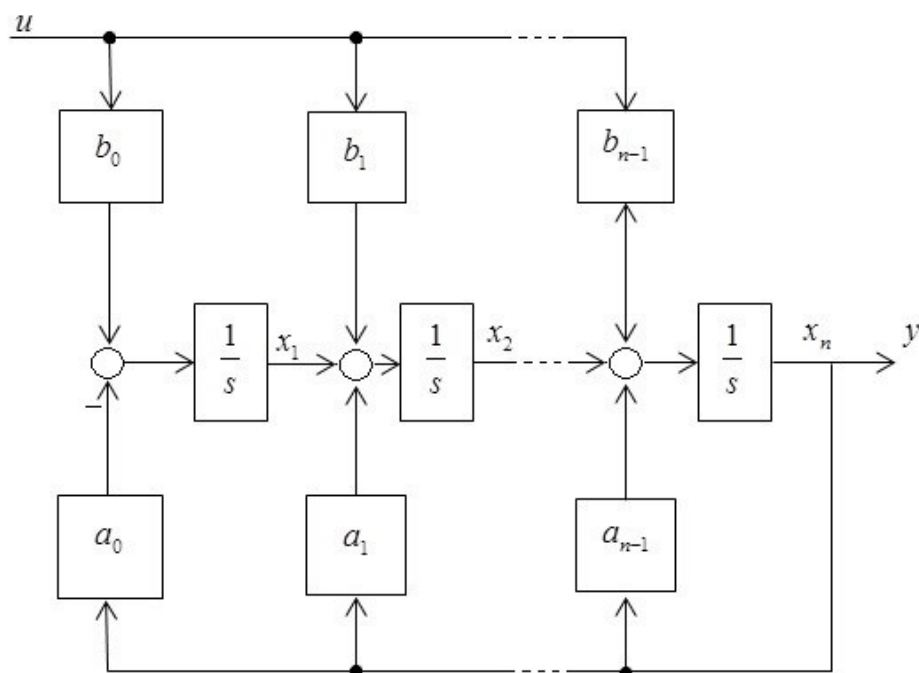
$$\mathbf{A}_o = \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.43b)$$

$$\mathbf{b}_o = \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{b} = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}]^T, \quad (2.43c)$$

$$\mathbf{c}_o^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_0 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]. \quad (2.43d)$$

Rovnako v tomto prípade štvorcová matica (2.42) má rovnaký tvar a štruktúru ako matice (2.34), a preto platí

$$|\det \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T)| = 1 \quad (2.44)$$



Obr. 2.10 Kanonický tvar pozorovania, pre $d=0$

Z vzájomného zrovnania vzťahov (2.35) a (2.43) vyplýva, že medzi kanonickými tvarmi riadenia a pozorovania platí dualita, tj.

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_c^T, \quad \mathbf{b}_o = \mathbf{c}_c, \quad \mathbf{c}_o^T = \mathbf{b}_c^T. \quad (2.45)$$

Všetky vyššie uvedené kanonické tvary majú stavovú maticu systému v Frobeniovom tvare, ktorý sa vyznačuje tým, že v prvom, alebo poslednom riadku, prvom alebo poslednom stĺpci vystupujú záporné koeficienty charakteristického mnohočlena systému a nad, alebo pod hlavnou diagonálou vystupujú jednotky, ostatné prvky sú nulové. Veľmi dôležité je, že kanonické tvary riadenia a k nim duálne kanonické tvary pozorovania môžu byť zostavené priamo na základe znalostí prenosu (2.38) [Vítečková, Víteček, 2005].

2.3 Jordanov kanonický tvar

Pri hľadaní stavových rovníc Jordanovho kanonického tvaru je vhodnejšie vyjsť z prenosu systému $G(s)$ podľa (2.46) [Štecha, Havlena, 1999]. Pri predpoklade, že charakteristický polynóm $N(s)$ má nenásobné reálne korene (systém má nenásobné prenosové póly), sa môže prenos $G(s)$ rozložiť na súčet parciálnych zlomkov

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - s_i} + b_n, \quad (2.46)$$

kde koeficienty Heavisidovho rozkladu sú rovné

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow s_i} G(s)(s - s_i). \quad (2.47)$$

Ak sa zvolia stavy x_i podľa vzťahu

$$\frac{X_i(s)}{U(s)} = \frac{1}{s - s_i} \Rightarrow \dot{x}_i = s_i x_i + u, \quad (2.48)$$

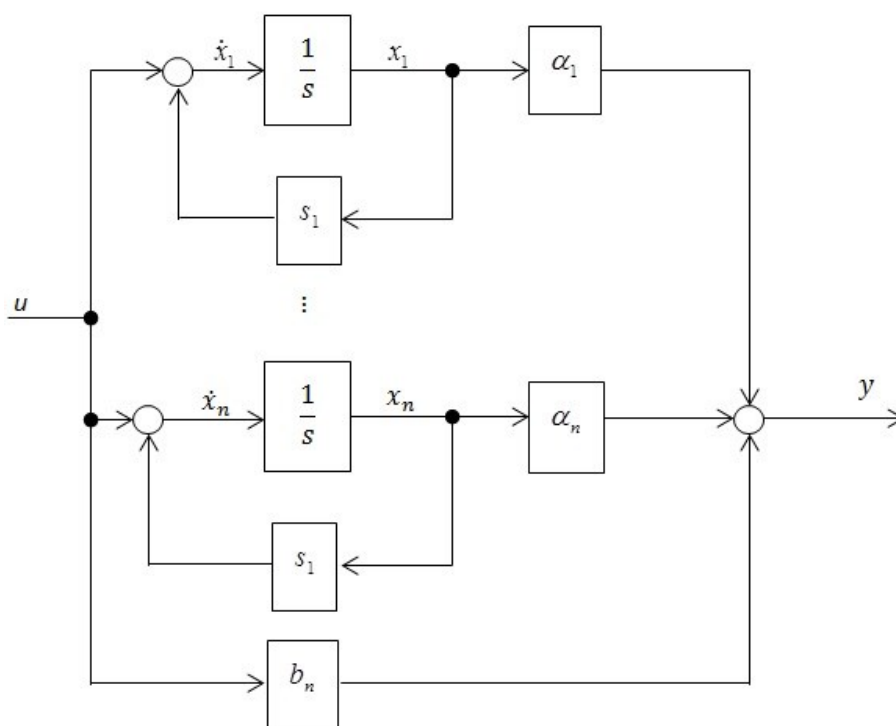
potom je výstup systému rovný

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + b_n u. \quad (2.49)$$

Z predchádzajúcich vzťahov priamo plyní vektorový zápis stavových rovníc v tvare (2.48), kde matice \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} sú rovné

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{c} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n], \quad \mathbf{d} = [b_n].$$



Obr. 2.11 Jordanov kanonický tvar stavových rovníc [ŠTECHA, I. & HAVLENA, 1999]

Jednotlivé rovnice pre stavové premenné sú na sebe nezávislé, čo je zrejmé z tvaru matice \mathbf{A} , vid' (2.50). Z čoho vyplýva že riešenie takýchto rovníc je jednoduché, ovšem aby sme mohli určiť Jordanov kanonický tvar musíme poznať prenosové póly s_i [Štecha, Havlena, 1999].

Pre násobné a komplexné póly je to zložitejšie, v ďalšom texte sa nebude s touto formou pracovať.

2.4 Kanonické tvary mnohorozmerných systémov

Kanonický tvar riaditeľnosti

Základným predpokladom systému pre kanonický tvar riaditeľnosti je, že matica riaditeľnosti \mathbf{Q}_{co} o rozmere $n \times n \cdot s$ má hodnotu n a teda platí

$$\text{rank } \mathbf{Q}_{co} = \text{rank}[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (2.51)$$

a zároveň

$$\text{rank } \mathbf{B} = s. \quad (2.52)$$

Nech \mathbf{B}_i bude i -tý ($i = 1, \dots, s$) stĺpec matice \mathbf{B} . Zo vzťahu (2.51) vyplýva z reťazca stĺpcov

$$\mathbf{Q}_{co} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_s, \mathbf{AB}_1, \mathbf{AB}_2, \dots, \mathbf{AB}_s, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}_s] \quad (2.53)$$

Pokiaľ zostavíme z ľubovoľných stĺpcov matice \mathbf{Q}_{co} taký determinant n -tého stupňa, ktorý má hodnotu rôznu od nuly, potom platí vzťah (2.51), systém je riaditeľný.

Z týchto stĺpcov vytvoríme transformačnú maticu v tvare

$$\mathbf{T}_{co} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{AB}_1, \dots, \mathbf{A}^{d_1-1}\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{AB}_2, \dots, \mathbf{A}^{d_2-1}\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{AB}_3, \dots, \mathbf{A}^{d_s-1}\mathbf{B}_s] \quad (2.56)$$

kde d_1, d_2, \dots, d_s sú indexmi riaditeľnosti dvojice (\mathbf{A}, \mathbf{B}) spĺňajúce podmienku

$$\sum_{i=1}^s d_i = n \quad (2.57)$$

Pokiaľ existuje regulárna matica \mathbf{T}_{co} tvaru (2.56), potom môžeme zapísať kanonický tvar riaditeľnosti v tvare (2.58) [Kaczorek, Dzieliński, Dabrowski, Łopatka, 2005].

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{co} &= \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{co} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{co \ 11} & \dots & \mathbf{A}_{co \ 1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{co \ s1} & \dots & \mathbf{A}_{co \ ss} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{co \ ii} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0^{ii} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1^{ii} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2^{ii} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{d_i-1}^{ii} \end{bmatrix} \in R^{d_i \times d_i} \\ \mathbf{A}_{co \ ij} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0^{ij} \\ 0 & \dots & 0 & -a_1^{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{d_i-1}^{ij} \end{bmatrix} \in R^{d_i \times d_j} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, s \end{aligned} \quad (2.58a)$$

$$\mathbf{B}_{co} = \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{B} = \text{diag} [\bar{\mathbf{b}}_1 \quad \bar{\mathbf{b}}_2 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{b}}_s] \quad \bar{\mathbf{b}}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{d_i} \quad (2.58b)$$

Kanonický tvar riadenia

Nech \mathbf{t}_i ($i = 1, \dots, n$) bude i -tým riadkom matice \mathbf{T}_{co}^{-1} z matice \mathbf{T}_{co} (2.56). Použitím \mathbf{t}_i , definujeme

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{c1} \\ \mathbf{T}_{c2} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{cs} \end{bmatrix} \in R^{n \times n}, \quad \mathbf{T}_{ci} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_i \\ \mathbf{t}_i \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{i1} \\ \mathbf{t}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{id_i-1} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Na základe (2.56) a (2.59) môžeme tvrdiť, že matica \mathbf{T}_c je regulárna, pretože $\det \mathbf{T}_c \mathbf{P} = 1$. Stĺpce inverznej matice \mathbf{T}_c^{-1} označme $\bar{\mathbf{t}}_{11}, \bar{\mathbf{t}}_{12}, \dots, \bar{\mathbf{t}}_{1d_1}, \bar{\mathbf{t}}_{21}, \bar{\mathbf{t}}_{22}, \dots, \bar{\mathbf{t}}_{2d_2}, \bar{\mathbf{t}}_{31}, \dots, \bar{\mathbf{t}}_{sd_s}$ [Kaczorek, Dzieliński, Dabrowski, Łopatka, 2005]. S prihliadnutím na (2.59) môžeme napísať

$$\mathbf{T}_c \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{c1} \mathbf{A} \\ \mathbf{T}_{c2} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{cs} \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{ci} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_i \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_i \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_i \mathbf{A}^{d_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{i2} \\ \mathbf{t}_{i3} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{id_i} \\ \mathbf{t}_i \mathbf{A}^{d_i} \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Riadok $\mathbf{t}_i \mathbf{A}^{d_i}$ je lineárna kombinácia riadkov matice \mathbf{T}_c , teda

$$\mathbf{t}_i \mathbf{A}^{d_i} = \sum_{j=1}^s \sum_{k=0}^{d_i-1} -a_k^{ij} \mathbf{t}_{j,k+1} \quad \text{pre } i = 1, \dots, s. \quad (2.61)$$

Z rovnosti $\mathbf{T}_c \mathbf{T}_c^{-1} = \mathbf{I}_n$ získame

$$\mathbf{t}_{ij} \bar{\mathbf{t}}_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{pre } i = k \text{ alebo } j = l \\ 0 & \text{pre } i \neq k \text{ alebo } j \neq l \end{cases} \quad (2.62)$$

Pokiaľ existuje regulárna matica \mathbf{T}_c tvaru (2.59), potom môžeme zapísať kanonický tvar riadenia v tvare (2.63) [Kaczorek, Dzieliński, Dabrowski, Łopatka, 2005].

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_c &= \mathbf{T}_c \mathbf{A} \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{c11} & \cdots & \mathbf{A}_{c1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{cs1} & \cdots & \mathbf{A}_{css} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_{cii} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0^{ii} & -a_1^{ii} & -a_2^{ii} & \cdots & -a_{d_i-1}^{ii} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{cij} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_0^{ij} & -a_1^{ij} & \cdots & -a_{d_j-1}^{ij} \end{bmatrix}, \quad i \neq j \quad i, j = 1, \dots, s
\end{aligned} \tag{2.63a}$$

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{T}_c \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{c1} \\ \mathbf{B}_{c2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{cs} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{i1} & \cdots & b_{is-i} \end{bmatrix}, \tag{2.63b}$$

$$\text{kde } \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{q}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B}_{j+1} \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, s-i-1$$

Príklad:

Majme matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vypočítame si maticu \mathbf{Q}_{co}

$$\mathbf{Q}_{co} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{A}\mathbf{B}_1, \mathbf{A}\mathbf{B}_2, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2, \mathbf{A}^3\mathbf{B}_1, \mathbf{A}^3\mathbf{B}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -10 & -10 & -30 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 13 & 13 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

Zo stĺpcov matice \mathbf{Q}_{co} (2.53) si zostavíme vhodnú transformačnú maticu \mathbf{T}_{co} , zvolíme som si stĺpce $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{A}\mathbf{B}_2, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_2$

$$\mathbf{T}_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Pomocou transformačnej matice vypočítame stavovú maticu pre kanonicky tvar riaditeľnosti A_{co} i maticu vstupov pre kanonický tvar riaditeľnosti B_{co}

$$A_{co} = T_{co}^{-1} A T_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_{co} = T_{co}^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pre výpočet kanonického tvaru riadenia si zvolíme, podľa vzťahu (2.60) transformačnú maticu T_c , ktorej riadky musia byť medzi sebou lineárne nezávislé.

$$T_c = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_4 \\ t_4 A \\ t_4 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pomocou transformačnej matice vypočítame stavovú maticu pre kanonicky tvar riadenia A_c i maticu vstupov pre kanonický tvar riadenia B_c

$$A_c = T_c A T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_c = T_c B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kanonický tvar pozorovateľnosti

Základným predpokladom systému pre kanonický tvar pozorovateľnosti je, že matica o rozmere $p \cdot n \times n$ má hodnotu n a teda platí

$$\text{rank } Q_{ob} = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (2.64)$$

a zároveň

$$\text{rank } C = p. \quad (2.65)$$

Nech C_i bude i -ti ($i=1, \dots, p$) riadok matice C . Zo vzťahu (2.64) vyplýva z reťazca riadkov

$$Q_{ob} = [C_1, C_2, \dots, C_p, C_1 A, C_2 A, \dots, C_p A, C_1 A^2, C_2 A^2, \dots, C_p A^2, C_1 A^3, \dots, C_p A^{n-1}] \quad (2.66)$$

Pokiaľ zostavíme s ľubovoľných riadkov matice Q_{ob} taký determinant n -tého stupňa, ktorý má hodnotu rôznu od nuly, potom platí vzťah (2.64), systém je pozorovateľný.

Z týchto stĺpcov vytvoríme transformačnú maticu v tvare

$$T_{ob} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ \vdots \\ C_1 A^{h_1-1} \\ C_2 \\ C_2 A \\ \vdots \\ C_2 A^{h_2-1} \\ C_3 \\ C_3 A \\ \vdots \\ C_p A^{h_p-1} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

kde h_1, h_2, \dots, h_p sú indexmi pozorovateľnosti dvojice (A, B) spĺňajúce podmienku

$$\sum_{i=1}^p h_i = n \quad (2.68)$$

Pokiaľ existuje regulárna matica T_{ob} tvaru (2.67), potom môžeme zapísať kanonický tvar riaditeľnosti v tvare (2.69) [Kaczorek, Dzieliński, Dabrowski, Łopatka, 2005].

$$\begin{aligned} A_{ob} &= T_{ob} A T_{ob}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{ob11} & \cdots & A_{ob1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{obp1} & \cdots & A_{obpp} \end{bmatrix}, \\ A_{obii} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0^{ii} & -a_1^{ii} & -a_2^{ii} & \cdots & -a_{h_i-1}^{ii} \end{bmatrix} \in R^{h_i \times h_i} \\ A_{obij} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0^{ij} & -a_1^{ij} & \cdots & -a_{h_i-1}^{ij} \end{bmatrix} \in R^{h_i \times h_j} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, p \\ C_{ob} &= C T_{ob}^{-1} = \text{diag} [\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \cdots \quad \bar{c}_p], \quad \bar{c}_i = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \in R^{h_i} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Kanonický tvar pozorovania

Nech \mathbf{t}_i ($i = 1, \dots, n$) bude i -tým stĺpcom matice \mathbf{T}_{ob} (2.67). Použitím týchto stĺpcov vytvoríme maticu

$$\mathbf{T}_o = [\mathbf{t}_1, \mathbf{A}\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{A}^{h_1-1}\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{A}\mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{A}^{h_2-1}\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \dots, \mathbf{A}^{h_p-1}\mathbf{t}_p] \quad (2.68)$$

Podobným spôsobom ako pri matici \mathbf{T}_c (2.59) môžeme preukázať, že matica \mathbf{T}_o (2.68) je regulárna teda môžeme zapísať kanonický tvar pozorovania v tvare (2.69) [Kaczorek, Dzieliński, Dabrowski, Łopatka, 2005]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_o &= \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{o11} & \cdots & \mathbf{A}_{o1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{op1} & \cdots & \mathbf{A}_{opp} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{oii} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0^{ii} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1^{ii} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2^{ii} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{h_i-1}^{ii} \end{bmatrix} \in R^{h_i \times h_i}, \\ \mathbf{A}_{obij} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0^{ij} \\ 0 & \cdots & 0 & -a_1^{ij} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{h_j-1}^{ij} \end{bmatrix} \in R^{h_i \times h_j} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{C}_o = \mathbf{C} \mathbf{T}_o = [\mathbf{C}_{o1} \quad \mathbf{C}_{o2} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{op}], \quad \mathbf{C}_{oi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_{1i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{p-i,i} \end{bmatrix} \in R^{p \times h_i}.$$

Príklad:

Majme matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zostavíme vhodnú transformačnú maticu \mathbf{T}_{ob}

$$\mathbf{T}_{ob} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pomocou transformačnej matice vypočítame stavovú maticu pre kanonicky tvar pozorovateľnosti \mathbf{A}_{ob} i maticu výstupov pre kanonický tvar riaditeľnosti \mathbf{C}_{ob}

$$\mathbf{A}_{ob} = \mathbf{T}_{ob} \mathbf{A} \mathbf{T}_{ob}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{ob} = \mathbf{C} \mathbf{T}_{ob}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pre výpočet kanonického tvaru pozorovania si zvolíme, podľa vzťahu transformačnú maticu \mathbf{T}_o , ktorej riadky musia byť medzi sebou lineárne nezávislé

$$\mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_3 \\ \mathbf{A} \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pomocou transformačnej matice vypočítame stavovú maticu pre kanonicky tvar pozorovania \mathbf{A}_o i maticu výstupov pre kanonický tvar pozorovania \mathbf{C}_o

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_o = \mathbf{C} \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Prístupy k návrhu stavového regulátora a pozorovateľa

V praxi, u dynamických systémov často dochádza k tomu, že sa nemôžu merať stavové premenné, a to buď z dôvodov ich nedostupnosti, vysokých nákladov, alebo veľkého zašumenia [Vítečková, Víteček 2005]. V týchto prípadoch sa rekonšuuje stav systému z merateľných vstupných a výstupných veličín pomocou dynamického člena, ktorý sa nazýva pozorovateľ. Rekonštrukcia stavov sa v literatúre nazýva i estimácia stavov, alebo odhad stavov. Preto sa pozorovateľ niekedy nazýva i estimátor alebo rekonštruktor. Sú známe rôzne druhy pozorovateľov podľa ich rádov a štruktúry. Pokiaľ sa výstup pozorovateľa blíži k skutočnému stavu systému, je možné ho použiť napr. ku konštrukcií spätnej väzby. Potom je ale nutné preskúmať ako pozorovateľ ovplyvní dynamiku celého obvodu.

3.1 Pozorovateľ stavu systému tvorený modelom systému

Majme systém S charakterizovaný maticami $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d$. Vytvoríme model S_M systému S , ktorý bude mať rovnaké stavové rovnice, ale na ktorom budú všetky stavy merateľné. Je možné očakávať, že ak budeme do modelu systému S_M privádzať rovnaké vstupné signály

ako do reálneho systému S , potom stavy merané na modeli budú približne rovné stavom systému.

Ak sa prevedie matematický rozbor týchto úvah. Veličiny v modeli S_M budú značené so strieškou, nebude sa uvažovať priama väzba medzi vstupom a výstupom ($d = 0$), pretože nedodáva do výstupu žiadnu informáciu o stave systému. Systémy S a S_M majú teda stavové rovnice v tvare:

Model S :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad (3.1a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_o. \quad (3.1c)$$

Model S_M :

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad (3.2a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t), \quad (3.2b)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}_o. \quad (3.2c)$$

Je definovaný vektor odchýlky stavu systému a modelu:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.3)$$

Zo stavových rovníc systému (3.1) a modelu (3.2) plynie diferenciálna rovnica odchýlky

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t_0) = \mathbf{x}_o - \hat{\mathbf{x}}_o = \boldsymbol{\varepsilon}_o. \quad (3.4)$$

Jej riešenie

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \exp^{\mathbf{A}(t-t_0)} (\mathbf{x}_o - \hat{\mathbf{x}}_o) = \exp^{\mathbf{A}(t-t_0)} \boldsymbol{\varepsilon}_o. \quad (3.5)$$

Odtiaľto plynie, že odchýlka konverguje k nule $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{0}$, ak majú vlastné čísla matice systému \mathbf{A} zápornú reálnu časť, systém S je stabilný. V opačnom prípade odchýlka diverguje a stav $\hat{\mathbf{x}}$ modelu S_M sa neblíži stavu \mathbf{x} systému S .

Preto sa snažíme navrhnúť pozorovateľ systému tak, aby odchýlka vždy konvergovala k nule a aby sme mohli voliť i rýchlosť konvergenencie. Tento typ pozorovateľa je popísaný v nasledujúcich dvoch kapitolách.

3.2 Luenbergerov asymptotický pozorovateľ

Je daný jednorozmerný lineárny spojitý dynamický podsystem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pri predpoklade, že dynamický podsystem (3.6) je riaditeľný a pozorovateľný, tj. platia rovnice (2.13), (2.15), (2.17), (2.19), kde $\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ je štvorcová matica riaditeľnosti podsystemu (3.6) rádu n , a $\mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)$ je štvorcová matica pozorovateľnosti podsystemu (3.6) rádu n [Vítečková, Víteček, 2005].

Pre dynamický podsystem (3.6) má Luenbergerov pozorovateľ tvar (3.2a):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}_L \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_L u + \mathbf{l}y, & \hat{\mathbf{x}}_0 &= \hat{\mathbf{x}}(0), \\ \hat{y} &= \mathbf{c}_L^T \hat{\mathbf{x}}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

\mathbf{A}_L – štvorcová stavová matica dynamiky pozorovateľa rádu n , \mathbf{b}_L – vektor vstupov pozorovateľa dimenzie n , \mathbf{c}_L – vektor výstupov pozorovateľa dimenzie n , \mathbf{l} – vektor korekcie stavu pozorovateľa dimenzie n [Vítečková, Víteček, 2005]. Po uvažení rovníc (3.6) a (3.7) sa dostane:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\mathbf{x} - \mathbf{A}_L \hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{b} - \mathbf{b}_L)u. \quad (3.8)$$

Vektor odchýliek stavu $\boldsymbol{\varepsilon}$ by nemal závisieť na vstupnej premennej u a odhad \hat{y} pre skutočný stav \mathbf{x} by mal byť $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, a preto musí platiť:

$$\mathbf{b}_L = \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_L = \mathbf{c}. \quad (3.9)$$

Pokiaľ sa zvolí

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T, \quad (3.10)$$

a za predpokladu že platí (3.9), dostaneme lineárne diferenciálne rovnice

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}_L \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (3.11)$$

ktoré popisuje časový vektor odchýliek stavu $\boldsymbol{\varepsilon}$. Počiatočný odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}_0$ sa väčšinou predpokladá nulový.

Je zrejmé, že pre asymptotický odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}$ musí platiť

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

tj. lineárna diferenciálna rovnica (3.11) musí byť asymptoticky stabilná. Aby odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}$ bol i pri zmenách skutočného stavu \mathbf{x} dostatočne presný a rýchly, dynamika pozorovateľa (3.7) vyjadrená charakteristickými vlastnými číslami matice \mathbf{A}_L musí byť rýchlejšia ako dynamika systému (3.6) vyjadrená charakteristickými číslami matice \mathbf{A} . Pri stavovom riadení musí byť dynamika pozorovateľa rýchlejšia ako dynamika uzavretého systému riadenia [Vítečková, Víteček, 2005].

Charakteristický mnohočlen pozorovateľa je daný vzťahom:

$$N_L(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_L) = s^n + a_{n-1}^l s^{n-1} + \dots + a_1^l s + a_0^l = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{a}^l = [a_0^l, a_1^l, \dots, a_{n-1}^l]^T, \quad (3.14)$$

kde p_i sú charakteristické čísla matice \mathbf{A}_L , tj. póly pozorovateľa, \mathbf{a}^l - vektor koeficientov charakteristického mnohočlenu pozorovateľa, det - determinant.

Podobne charakteristický mnohočlen pozorovaného systému (3.6)

$$N(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = (s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T, \quad (3.16)$$

Asymptotická stabilita pozorovateľa vyžaduje splnenie podmienok

$$\operatorname{Re} p_i < 0 \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

a ďalej aby pozorovateľ mal rýchlejšiu dynamiku ako pozorovaný podsystem, musia všetky jeho póly p_i ležať vľavo od všetkých pólov s_i pozorovaného podsystemu zároveň musia byť ďalej od imaginárnej osy ako všetky póly systému (kladnej i zápornej reálnej časti) obr. 3.1, tj. platí:

$$\min |\operatorname{Re} p_i| > \max |\operatorname{Re} s_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.18)$$

Konvergencia $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}$ bude tým rýchlejšia, čím väčšia bude rezerva v nerovnosti (3.18). Často sa uvádza desaťnásobok, ale je treba si uvedomiť, že príliš veľká rezerva v nerovnostiach (3.18) vede na veľké hodnoty zložiek l_i vektoru korekcie \mathbf{l} a teda k veľkému zosilneniu šumu. Preto sa táto rezerva volí dvojnásobná až päťnásobná (neplatí pre integračné podsystemy) [Vítečková, Víteček, 2005]. Póly pozorovateľa sa najčastejšie volia násobne reálne

$$p_i = -p, \quad (3.19)$$

A preto podmienky (3.18) môžu byť zapísané v tvare

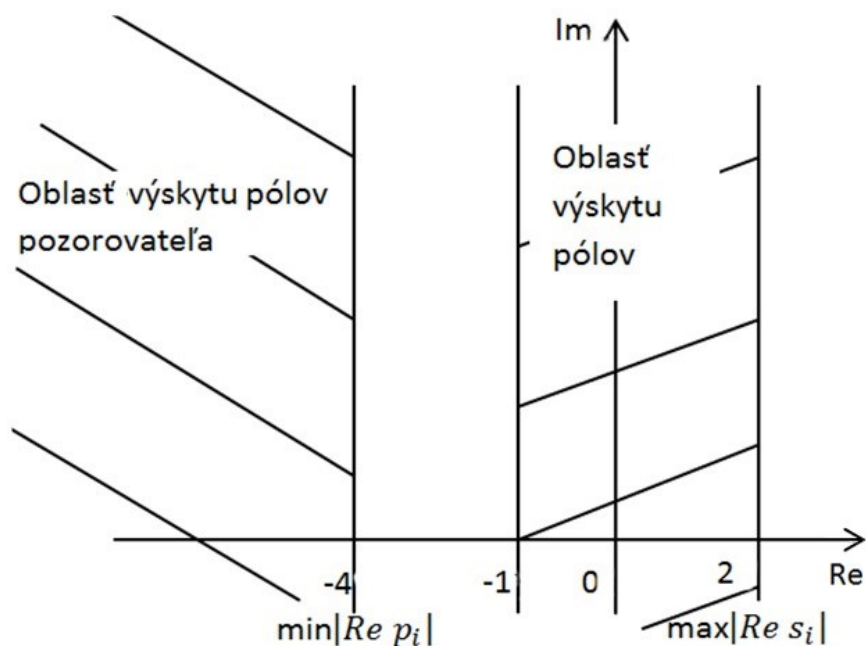
$$|p| > \max |\operatorname{Re} s_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.20)$$

V tomto prípade charakteristický mnohočlen pozorovateľa v súlade s binomickou vetou má tvar

$$N_L(s) = (s + p)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j s^{n-j} = s^n + np s^{n-1} + \dots + np^{n-1} s + p^n. \quad (3.21)$$

Použitie násobných reálnych pólov pozorovateľa zaručuje konvergenciu (3.12) s relatívnym tlmením $\xi = 1$. Pokiaľ chceme zaistiť kmitavý priebeh s $\xi \doteq 0,707$, pól $(s + p)^n$ nahradíme súčinom mnohočlenov 2. stupňa

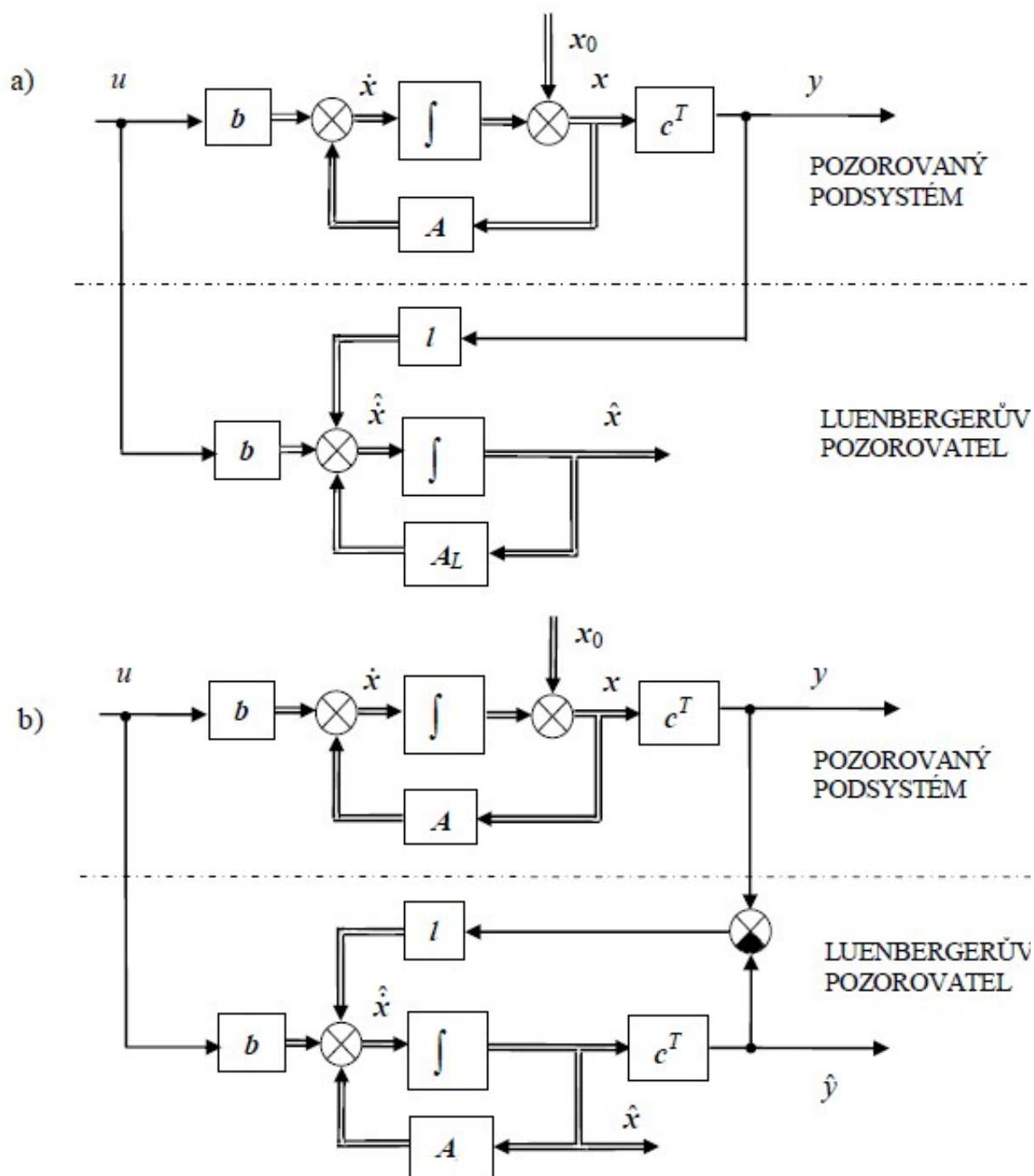
$$s^2 + 2ps + 2p^2 \quad (3.22)$$



Obr.3.1 Rozloženie pólů systému a pozorovateľa

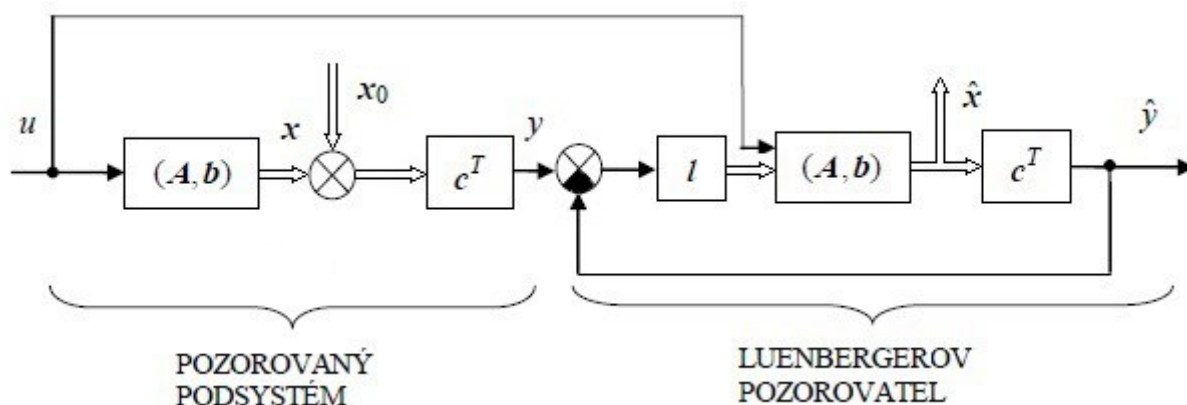
Schéma na obr. 3.2a môže byť transformovaná na ekvivalentnú schému na 3.2b, z ktorého vyplýva interpretácia činnosti pozorovateľa. Na základe rozdielu výstupných premenných $y - \hat{y}$ je korigovaný odhad stavu \hat{x} . Je zrejmé, že Luenbergerov pozorovateľ je vlastne modelom pozorovaného podsystemu s priebežnou spätno-väzbovou korekciou [Vítečková, Víteček, 2005]

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(y - \hat{y}) \quad (3.23)$$



Obr. 3.2 Schéma Luenbergovho pozorovateľa: a) pôvodná, b) transformovaná [Vítečková, Víteček, 2005]

Je to v podstate regulačný obvod, ktorý sa snaží anulovať rozdiel $y - \hat{y}$, a tým taktiež vektor odchýlky stavu $\epsilon = x - \hat{x}$ [Vítečková, Víteček, 2005]. Nápadne to ukazuje obr. 3.3. Vektor l je preto taktiež zároveň vektorom zosilnenia pozorovateľa.



Obr.3.3 Interpretácia Luenbergovho pozorovateľa [Vítečková, Víteček, 2005]

Pri návrhu pozorovateľa v súlade (3.7) a (3.9) je nutné určiť neznámy vektor korekcie stavu \mathbf{l} . Existuje viacero spôsobov, napr. ho môžeme určiť porovnaním koeficientov charakteristického mnohočlena podsystemu s odpovedajúcimi koeficientmi u rovnakých mocnín požadovaného charakteristického mnohočlenu pozorovateľa. Získa sa tak n rovníc lineárnych vzhľadom k neznámym n zložkám l_i vektora korekcie stavu \mathbf{l} .

Návrh pozorovateľa možno riešiť pomocou kanonického tvaru pozorovania a teda rovníc (2.43).

Matica dynamiky \mathbf{A}_o a vektor vstupu \mathbf{b}_o sú tvorené koeficientmi menovateľa a čitateľa prenosu pozorovaného systému

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \mathbf{c}^T (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{c}_o^T (\mathbf{sI} - \mathbf{A}_o)^{-1} \mathbf{b}_o = \frac{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})} = \\ &= \frac{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A}_o + \mathbf{b}_o\mathbf{c}_o^T) - \det(\mathbf{sI} - \mathbf{A}_o)}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A}_o)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

získaný priamo z pozorovaného podsystemu (3.6). Kanonický tvar pozorovania (2.43) je teda možné získať priamo zo znalostí prenosu (3.24) alebo taktiež pomocou podobnosti transformácie [Vítečková, Víteček, 2005].

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{x}, \mathbf{A}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o, \mathbf{b}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{b}, \mathbf{c}_o^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_o \quad (3.25)$$

Pozorovateľ (3.7) pre (3.9) môže byť vyjadrený v kanonickom tvare pozorovania

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_o &= \mathbf{A}_{Lo} \hat{\mathbf{x}}_o + \mathbf{b}_o u + \mathbf{l}_o y, \\ \hat{y} &= \mathbf{c}_o^T \hat{\mathbf{x}}_o, \end{aligned} \quad (3.26)$$

kde

$$A_{Lo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0^l \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1^l \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2^l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2}^l \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}^l \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

je štvorcová matica dynamiky pozorovateľa rádu n , v poslednom stĺpci vystupujú záporné koeficienty charakteristického mnohočlena pozorovateľa.

V súlade zo vzťahom (3.10) platí

$$A_{Lo} = A_o - l_o c_o^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 - l_{o1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 - l_{o2} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 - l_{o3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} - l_{o,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} - l_{on} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Na základe porovnania vzťahov (3.27) a (3.28) vyplýva

$$l_{oi} = a_{i-1}^l - a_{i-1} \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.29a)$$

tj. v súlade s (3.14) a (3.16)

$$l_o = a^l - a, \quad (3.29b)$$

kde l je vektor korekcie stavu pre pozorovateľ v kanonickom tvare pozorovania (3.26) [Vítečková, Víteček, 2005].

Pretože platí (3.26), môžeme napísať že

$$l_o y = T_o^{-1} l y \Rightarrow l = T l_o = T_o (a^l - a). \quad (3.29c)$$

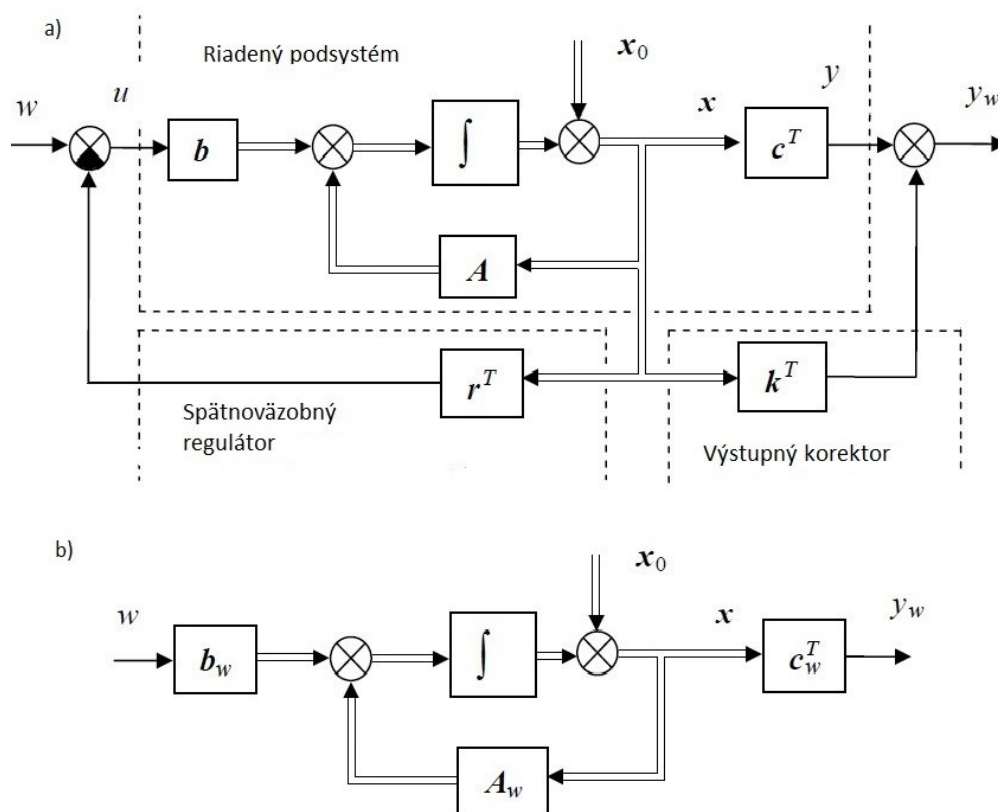
3.3 Návrh stavového regulátora

Správnou voľbou spätnoväzbového regulátora vyjadreného pomocou vektoru \mathbf{r} a výstupného korektora vektorom \mathbf{k} (obr. 3.4a) je treba realizovať uzavretý systém riadenia (obr. 3.4b) s matematickým modelom

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_w \mathbf{x} + \mathbf{b}_w w, \\ y_w &= \mathbf{c}_w^T \mathbf{x},\end{aligned}\tag{3.30}$$

kde w – je žiadaná premenná, y_w – výstupná premenná, \mathbf{A}_w – štvorcová stavová matica dynamiky (systému) rádu n , \mathbf{b}_w – vektor vstupov dimenzie n , \mathbf{c}_w – vektor výstupov dimenzie n [Vítečková, Víteček, 2005].

Predpokladá sa, že riadený podsystem (2.1) i uzavretý systém riadenia (3.30) sú riaditeľné i pozorovateľné a teda platia rovnice (2.13) a (2.17).



Obr. 3.4 Uzavretý systém riadenia: a) realizácia, b) bloková schéma [Vítečková, Víteček, 2005]

V tomto prípade existujú i odpovedajúce prenosy

$$\begin{aligned}G_s(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \\ &= \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0},\end{aligned}\tag{3.31}$$

$$G_{wy}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \mathbf{c}_w^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w)^{-1} \mathbf{b}_w = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w + \mathbf{b}_w \mathbf{c}_w^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w)} =$$

$$= \frac{b_{n-1}^w s^{n-1} + \dots + b_1^w s + b_0^w}{s^n + a_{n-1}^w s^{n-1} + \dots + a_1^w s + a_0^w}. \quad (3.32)$$

Z prenosu (3.31) a (3.32) vyplýva, že charakteristický mnohočlen riadeného podsystemu (2.1) má tvar

$$N_s(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad (3.33)$$

a uzavretého systému riadenia (3.30)

$$N_w(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w) = s^n + a_{n-1}^w s^{n-1} + \dots + a_1^w s + a_0^w. \quad (3.34)$$

Na základe obr. 3.4a a 3.4b platí

$$\mathbf{A}_w = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{r}^T, \quad (3.35a)$$

$$\mathbf{b}_w = \mathbf{b}, \quad (3.35b)$$

$$\mathbf{c}_w^T = \mathbf{c}^T + \mathbf{k}^T. \quad (3.35c)$$

Určenie neznámeho vektora \mathbf{k} je jednoduché. Vektor \mathbf{r} je možné určiť porovnaním koeficientov u rovnakých mocnín komplexnej premennej s po dosadení (3.35a) do (3.34). Získa sa tak n lineárnych rovníc pre n neznámých r_1, r_2, \dots, r_n [Vítečková, Víteček, 2005]. Tento postup nie je vhodný pre veľké hodnoty n pretože by bol veľmi náročný.

Zo vzťahu (2.35) je zrejme že kanonický tvar riadenia môže byť získaný i pomocou podobnostnej transformácie (2.33) kde $\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c)$ je inverzná matica riaditeľnosti transformovaného riadeného podsystemu (2.35), ktorá je daná vzťahom (2.34).

Potom platí

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{b}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b},$$

$$\mathbf{c}_c^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_c.$$

Dôležité je, že inverzná matica riaditeľnosti (2.34) môže byť určená bez znalostí matematického modelu riadeného podsystemu v kanonickom tvare riadenia (2.35), pretože je zostavená s charakteristického mnohočlena (3.33), ktorá sa pri podobnostnej transformácii nemení [Vítečková, Víteček, 2005]. Podobne i kanonický tvar riadenia uzavretého systému (3.30) má tvar

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_{wc} \mathbf{x}_c + \mathbf{b}_{wc} w, \quad (3.37a)$$

$$y_w = \mathbf{c}_w^T \mathbf{x}_c,$$

kde

$$\mathbf{A}_{wc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^w & -a_1^w & -a_2^w & \cdots & -a_{n-2}^w & a_{n-1}^w \end{bmatrix}, \quad (3.37b)$$

$$\mathbf{b}_{wc} = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T, \quad (3.37c)$$

$$\mathbf{c}_{wc}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}_c = [b_0^w \ b_1^w \ \cdots \ b_{n-2}^w \ b_{n-1}^w]. \quad (3.37d)$$

I v tomto prípade môže byť kanonický tvar riadenia (3.37) získaný priamo na základe znalostí (3.32) uzavretého systému riadenia (3.30), prípadne pomocou podobnostnej transformácie.

$$\mathbf{T}_{wc} = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}_w, \mathbf{b}_w) \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_{wc}, \mathbf{b}_{wc}), \quad (3.38)$$

kde $\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_{wc}, \mathbf{b}_{wc})$ je inverzná matica riaditeľnosti transformovaného uzavretého systému riadenia (3.37), ktorá je daná vzťahom

$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_{wc}, \mathbf{b}_{wc}) = \begin{bmatrix} a_1^w & a_2^w & \cdots & a_{n-1}^w & 1 \\ a_2^w & a_3^w & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1}^w & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Potom platí

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c &= \mathbf{T}_{wc}^{-1} \mathbf{x}, \\ \mathbf{A}_{wc} &= \mathbf{T}_{wc}^{-1} \mathbf{A}_w \mathbf{T}_{wc}, \\ \mathbf{b}_{wc} &= \mathbf{T}_{wc}^{-1} \mathbf{b}_w, \\ \mathbf{c}_{wc}^T &= \mathbf{c}_w^T \mathbf{T}_{wc}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Blokové schémy v kanonickom tvare riadenia pre riadený podsystem (2.35) a uzavretý systém riadenia (3.37) sú rovnaké ako na obr. 3.4 s tým rozdielom, že musíme uvažovať u všetkých vektorov a matic index “c” a preto v súlade s obr. 3.4 platí

$$A_{wc} = A_c b_c r_c^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(a_0 + r_{c1}) & -(a_1 + r_{c2}) & -(a_2 + r_{c3}) & \cdots & -(a_{n-2} + r_{c,n-1}) & -(a_{n-1} + r_{cn}) \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

Na základe porovnania vzťahov (3.37b) a (3.41) vyplýva

$$r_c = a_w - a, \quad (3.42a)$$

$$r_c = [r_{c1} \quad r_{c2} \quad \cdots \quad r_{cn}]^T, \quad (3.42b)$$

$$a_w = [a_0^w \quad a_1^w \quad \cdots \quad a_{n-1}^w]^T, \quad (3.43c)$$

$$a = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}]^T, \quad (3.43d)$$

kde r_c je vektor transformovaného spätnoväzbového regulátora, a_w – vektor koeficientov charakteristického mnohočlena uzavretého systému riadenia (3.34), a – vektor koeficientov charakteristického mnohočlena regulovaného systému (3.33)

Pretože platí

$$r_c^T x_c = r^T x, \quad (3.44)$$

po uvážení prvého vzťahu v (3.36) vznikne

$$r^T = r_c^T T_c^{-1} = (a_w - a)^T T_c^{-1}. \quad (3.45)$$

Výsledný vzťah pre určenie vektoru spätnoväzbového riadenia r sa dosiahne po dosadení (2.33) do (3.45)

$$r^T = (a_w - a)^T [Q_{co}(A, b) Q_{co}^{-1}(A_c, b_c)]^{-1}. \quad (3.46)$$

Je zrejmé že vektor spätnoväzbového regulátora r umiestní do požadovanej polohy póly a vektor výstupného korektora k nuly uzavretého systému riadenia (3.30) [Vítečková, Víteček, 2005].

Cieľom uzavretého systému riadenia (3.30) je

$$y_w(t) \rightarrow w(t), \quad (3.47)$$

preto aby aspoň v ustálenom stave platila rovnosť

$$y_w(\infty) = w(\infty). \quad (3.48)$$

vektor c_w v (3.30) musí byť zvolený tak aby platila rovnosť

$$-c_w^T A_w^{-1} b = 1. \quad (3.49)$$

Rovnosť (3.49) vyplýva z ustáleného stavu

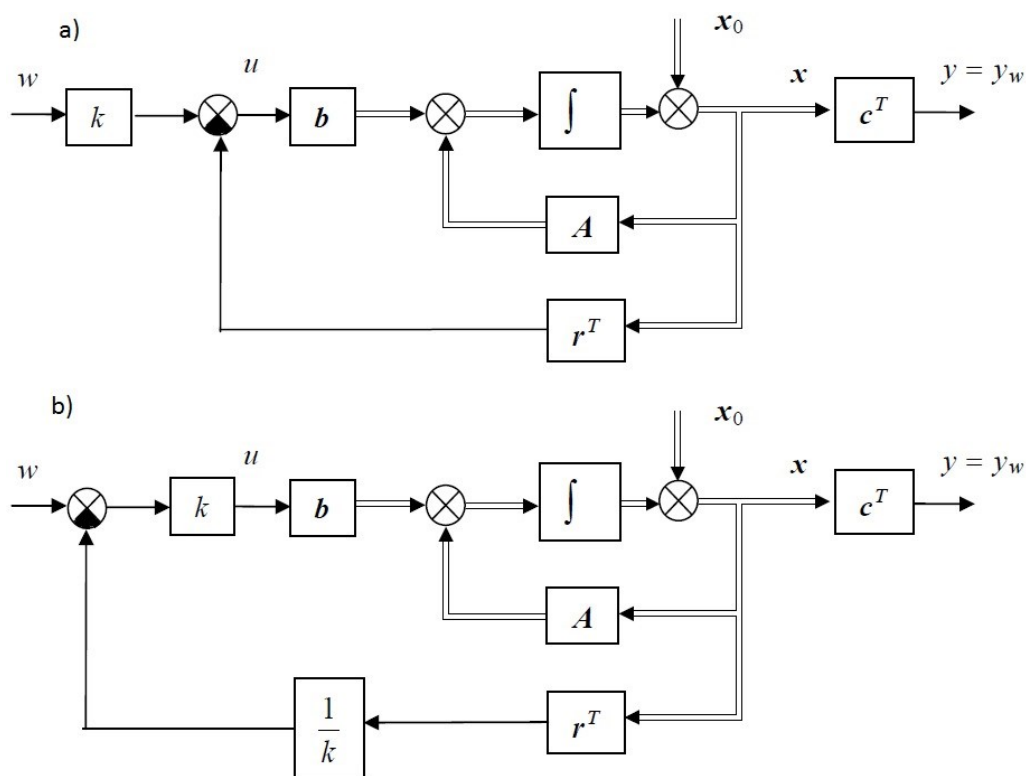
$$y_w(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [c_w^T (sI - A_w)^{-1} b] w(\infty), \quad (3.50)$$

a odpovedá rovnosti

$$b_0^w = a_0^w. \quad (3.51)$$

Z dôvodu zložitej realizácie výstupný korektor vyjadrený pomocou vektoru k nie je možné často použiť, tj. $k = 0$. V tomto prípade $c_w = c$ a je treba do žiadanej veličiny w (obr. 3.5a) zaradiť i korekčné zosilnenie

$$k = -\frac{1}{c^T A_w^{-1} b}. \quad (3.52)$$



Obr. 3.5 Použitie korekčného zosilnenia a) v žiadanej premennej, b) v riadiacej premennej [Vítečková, Víteček, 2005]

Korekčné zosilnenie (3.52) je možné zaradiť i do vstupnej premenej u (obr. 3.5b), ale potom je nutné vektor spätnoväzbového regulátora r vynásobiť prevrátenou hodnotou (3.52) [Vítečková, Víteček, 2005].

Požadované vlastnosti uzavretého systému riadenia môžu byť zadané v tvare stavového modelu (3.30), ale i priamo prenosom (3.32). Vektor výstupného korektora k sa určí na základe kanonického tvaru riadenia (2.35) riadeného podsystému (2.1) [Vítečková, Víteček, 2005], pretože platí

$$c_{wc}^T = c_c^T + k_c^T \Rightarrow k_c = c_{wc} - c_c. \quad (3.53)$$

Získaný vektor výstupného korektoru \mathbf{k}_c (3.53) je třeba transformovat na vektor \mathbf{k} pomocí vztahu

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T \mathbf{T}_c^{-1} = (\mathbf{c}_{wc} - \mathbf{c}_c)^T \mathbf{T}_c^{-1}, \quad (3.54)$$

alebo

$$\mathbf{k}^T = (\mathbf{c}_{wc} - \mathbf{c}_c)^T [\mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c)]^{-1}, \quad (3.55)$$

4. Príklady:

Všetky výpočty nižšie boli realizované pomocou softvéru Matlab verzia R2009b. Pre prehľadnosť nie sú uvádzané celé postupy výpočtu.

4.1 Príklad 1

Zadanie:

Zo zadaného stavového modelu určite stavovú maticu A , stavovú maticu vstupov b , výstupnú maticu systému c^T . Následne určite riaditeľnosť Q_{co} a pozorovateľnosť Q_{ob} daného modelu. Ak je model pozorovateľný a riaditeľný určite prenos sústavy $G_S(s)$. Vhodne zvolte prenos riadenia $G_{wy}(s)$ a následne dopočítajte parametre stavového regulátora r a korektora k . Navrhnete maticu pozorovateľa A_L . Vykreslite priebeh prenosu riadenia $G_{wy}(s)$, porovnajte priebehy vektorov stavov pozorovaného podsystemu x s Luenbergerovým pozorovateľom \hat{x} .

Daný stavový model:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + u$$

$$y = x_1 + 2x_2$$

Určenie matíc:

A – stavová matica systému

b – stavový vektor vstupov

c^T – výstupný vektor systému

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 2], \quad d = 0$$

Overenie riaditeľnosti:

$$Q_{co} = [b, Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det Q_{co}(A, b) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Systém je riaditeľný}$$

Overenie pozorovateľnosti:

$$Q_{ob} = [c^T, c^T A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det Q_{ob}(A, c^T) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Systém je pozorovateľný}$$

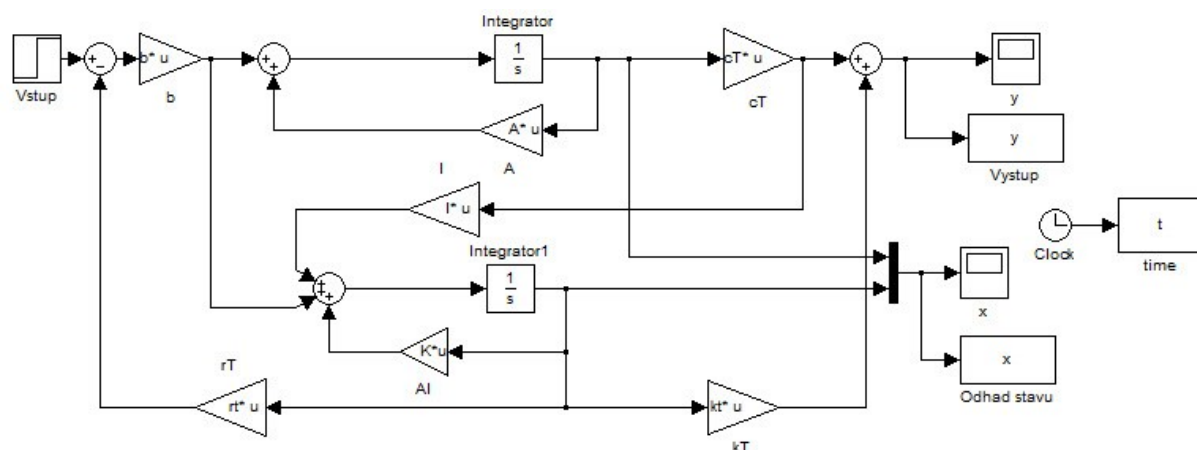
Určenie prenosu sústavy:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + d = \frac{2s+1}{s^2-s-2}$$

$$\mathbf{a}_s = [-2 \quad -1]^T \quad \mathbf{b}_s = [1 \quad 2]^T,$$

korene charakteristického mnohočlena $s_1 = 2$ a $s_2 = -1$, systém je nestabilný.

Nasledujúci obrázok obr. 4.1 predstavuje blokovú schému riadeného dynamického systému so stavovým modelom, Luenbergerovým pozorovateľom a stavovým regulátorom.



Obr.4.1 Bloková schéma modelu v programe Matlab-Simulink – príklad 1.

Určenie matice pozorovateľ'a:

Pri návrhu charakteristického mnohočlena pozorovateľa $N_L(s)$ vychádzame zo vzťahu (3.20). Z charakteristického mnohočlena systému $N_S(s)$ určíme póly pozorovaného systému $s_1 = 2$ a $s_2 = -1$. Na základe vzťahu (3.18) zvolím pól pozorovateľa $p = -8$ a dostaneme charakteristický mnohočlen pozorovateľa v tvare:

$$N_L(s) = (s + 8)^2 = s^2 + 16s + 64$$

$$a_1^l = 16, \quad a_0^l = 64$$

a) priame riešenie

$$A_L = A - l c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 2] = \begin{bmatrix} -l_1 & 1-2l_1 \\ 2-l_2 & 1-2l_2 \end{bmatrix}$$

$$N_I(s) = \det(sI - A_I) = s^2 + (l_1 + 2l_2 - 1)s + 3l_1 + l_2 - 2$$

$$s_0 : 3l_1 + l_2 - 2 = 64$$

$$s_1 : l_1 + 2l_2 - 1 = 16 \quad \rightarrow \quad l_1 = 23 \\ l_2 = -3$$

$$A_L = A - l c^T = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 - 2l_1 \\ 2 - 2l_2 & 1 - 2l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & -45 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

b) riešenie pomocou transformačnej matice

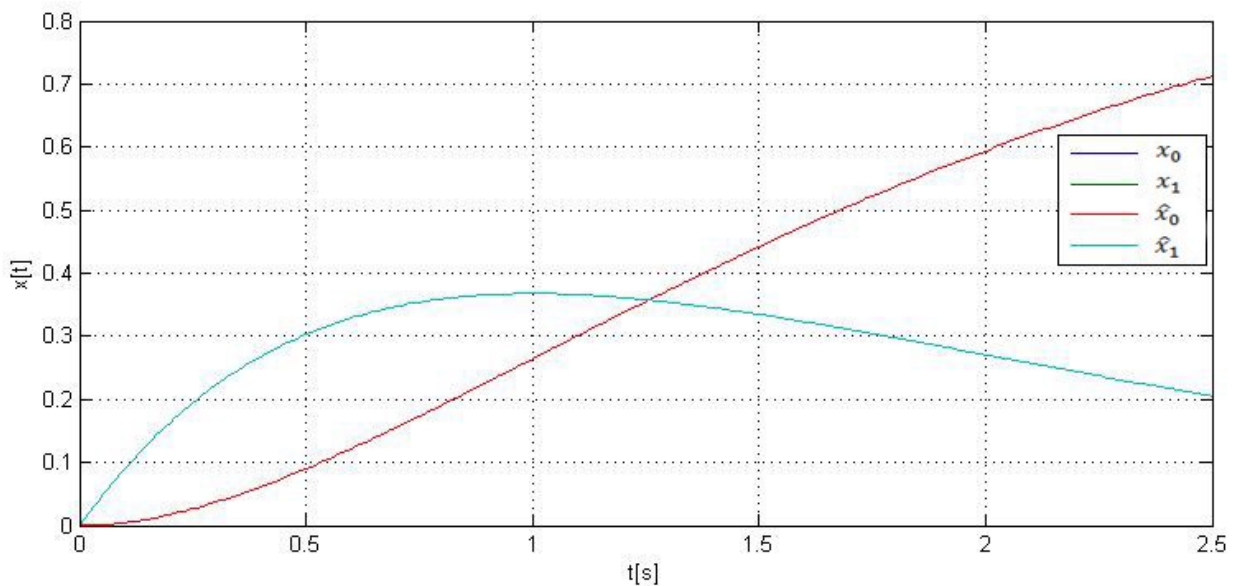
$$Q_{ob}^{-1}(A_o, c_o^T) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_o^{-1} = Q_{ob}^{-1}(A_o, c_o^T) Q_{ob}(A, c^T) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T_o = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$l = T_o(a_l - a) = \begin{bmatrix} 23 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Ako môžeme vidieť, vektor korekcie stavu pozorovateľa l sa nám v oboch riešeniach (priame riešenie a riešenie pomocou transformačnej matice) zhoduje a teda zhoduje sa i matica pozorovateľa A_L čím sme overili správnosť výsledku.



Obr.4.2 Priebehy stavových premenných x a \hat{x} – príklad 1.

Návrh stavového regulátora a výstupného korektora

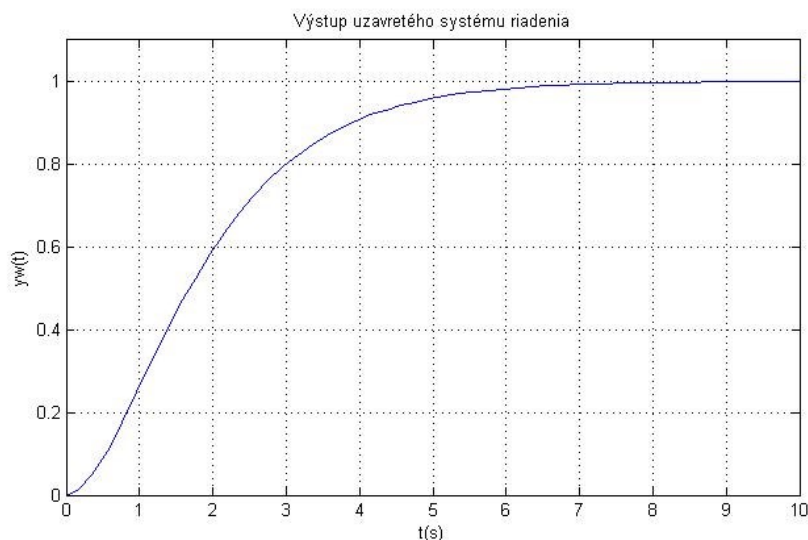
a) Prenos riadenia bez prekmitu $G_{wy}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$

$$\mathbf{a}_w = [1 \ 2]^T \quad \mathbf{b}_w = [1 \ 0]^T,$$

$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Keďže je stavový model v kanonickom tvare riadenia nie je potrebné rátať transformačnú maticu pretože tá je jednotková.

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{a}_w - \mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{r}_c^T = [3 \ 3] \quad \mathbf{k}_c = \mathbf{b}_w - \mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{r}_c^T = [0 \ -2]$$



Obr.4.3 Výstup uzavretého systému riadenia – príklad 1.

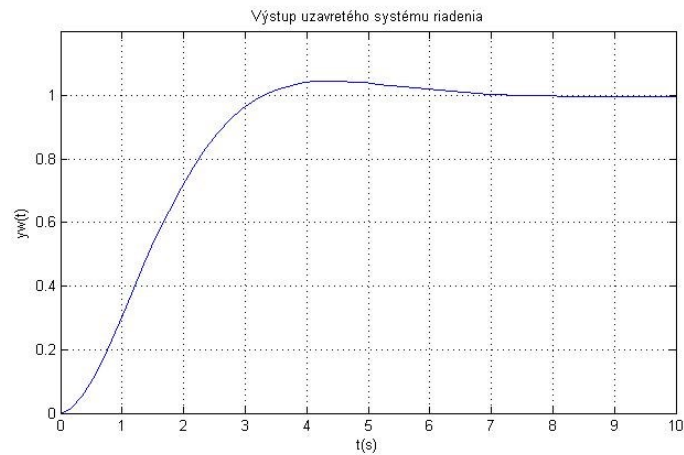
Pri 5% tolerancií dosiahne riadenie ustálený stav (doba regulácie) pri čase 4,7 s.

b) Prenos riadenia s prekmitom $G_{wy}(s) = \frac{1}{s^2 + 1,4s + 1}$

$$\mathbf{a}_w = [1 \ 1,4]^T \quad \mathbf{b}_w = [1 \ 0]^T,$$

Keďže je stavový model v kanonickom tvare riadenia nie je potrebné rátať transformačnú maticu pretože tá je jednotková.

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{a}_w - \mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} 3 \\ 2,4 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{r}_c^T = [3 \ 2,4] \quad \mathbf{k}_c = \mathbf{b}_w - \mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{r}_c^T = [0 \ -2]$$



Obr.4.4 Výstup uzavretého systému riadenia s prekmitom – príklad 1.

Pri 5% tolerancií dosiahne riadenie ustálený stav (doba regulácie) pri čase 2,9 s.

Záver príkladu 1:

Po určení stavovej matice A , stavovej matice vstupov b , výstupnej matice systému c^T sa overila riaditeľnosť a pozorovateľnosť modelu a následne bol určený prenos G_S . S navrhovaných prenosov riadenia môžeme vidieť, že pri prenose riadenia s prekmitom dosiahneme požadovaný stav o 1,8 s skôr. Pri návrhu matice pozorovateľa A_L bolo cieľom aby sa nám stavový vektor podsystemu x zhodoval so stavovým vektorom Luenbergerovho pozorovateľa \hat{x} ako vidíme z obr. 4.2 vektory sa nám prekrývajú.

4.2 Príklad 2

Zadanie:

Zo zadaného stavového modelu určite stavovú maticu A , stavovú maticu vstupov b , výstupnú maticu systému c^T . Následne určite riaditeľnosť Q_{co} a pozorovateľnosť Q_{ob} daného modelu. Ak je model pozorovateľný a riaditeľný určite prenos sústavy $G_s(s)$. Vhodne zvolte prenos riadenia $G_{wy}(s)$ a následne dopočítajte parametre stavového regulátora r a korektora k . Navrhnete maticu pozorovateľa A_L . Vykreslite priebeh prenosu riadenia $G_{wy}(s)$, porovnajte priebehy vektorov stavov pozorovaného pod systému x s Luenbergerovým pozorovateľom \hat{x} .

Daný stavový model:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -5x_2 + u$$

$$y = 5x_1 + 2x_2$$

Určenie matíc:

A – stavová matica systému

b – stavový vektor vstupov

c^T – výstupný vektor systému

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [5 \quad 2] \quad d = 0$$

Overenie riaditeľnosti:

$$Q_{co} = [b, Ab] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det Q_{co}(A, b) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Systém je riaditeľný}$$

Overenie pozorovateľnosti:

$$Q_{ob} = [c^T, c^T A]^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\det Q_{ob}(A, c^T) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -10 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \rightarrow \text{Systém je pozorovateľný}$$

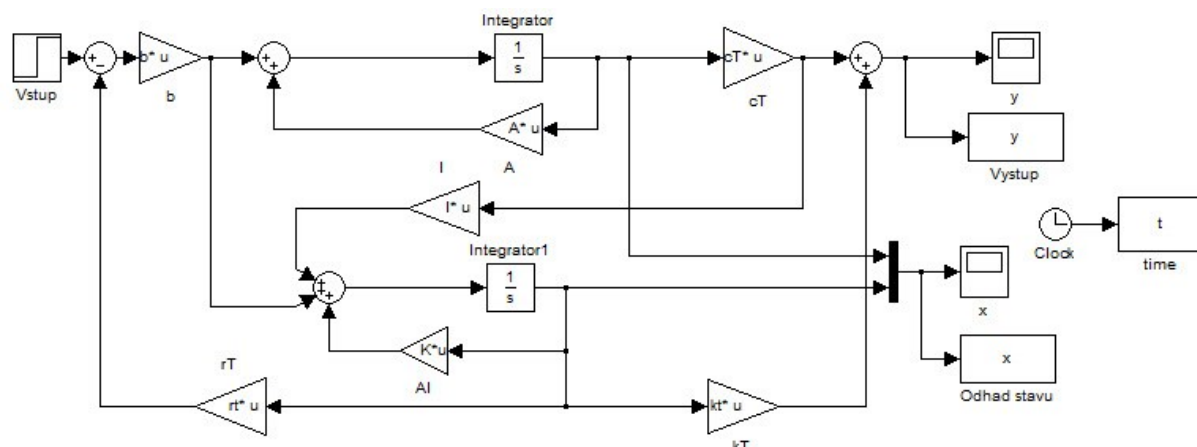
Určenie prenosu sústavy:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(sI - A + bc^T) - \det(sI - A)}{\det(sI - A)} + d = \frac{7s + 29}{s^2 + 7s + 10}$$

$$\mathbf{a}_s = [10 \ 7]^T \quad \mathbf{b}_s = [29 \ 7]^T,$$

korrene charakteristického mnohočlena $s_1 = -5$ a $s_2 = -2$

Nasledujúci obrázok obr. 4.5 predstavuje blokovú schému riadeného dynamického systému so stavovým modelom, Luenbergerovým pozorovateľom a stavovým regulátorom.



Obr.4.5 Bloková schéma modelu v programe Matlab-Simulink – príklad 2.

Určenie matice pozorovateľa:

Z charakteristického mnohočlena pozorovateľa $N_s(s)$ určíme póly pozorovaného systému $s_1 = -5$ a $s_2 = -2$. Na základe vzťahu (3.18) zvolím pól pozorovateľa $p = -10$ a dostaneme charakteristický mnohočlen pozorovateľa v tvare:

$$N_L(s) = (s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100$$

$$a_1^l = 20, \quad a_0^l = 100$$

a) priame riešenie

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \cdot [5 \ 2] = \begin{bmatrix} -2 - 5l_1 & -2l_1 \\ -5l_2 & -5 - 2l_2 \end{bmatrix}$$

$$N_L(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_L) = s^2 + (5l_1 + 2l_2 + 7)s + 25l_1 + 4l_2 + 10$$

$$s_0 : 25l_1 + 4l_2 + 10 = 100$$

$$s_1 : 5l_1 + 2l_2 + 7 = 20 \rightarrow l_1 = 4,2667$$

$$l_2 = -4,1667$$

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} -2 - 5l_1 & -2l_1 \\ -5l_2 & -5 - 2l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22,6665 & -8,2666 \\ 16,6665 & 1,6666 \end{bmatrix}$$

b) riešenie pomocou transformačnej matice

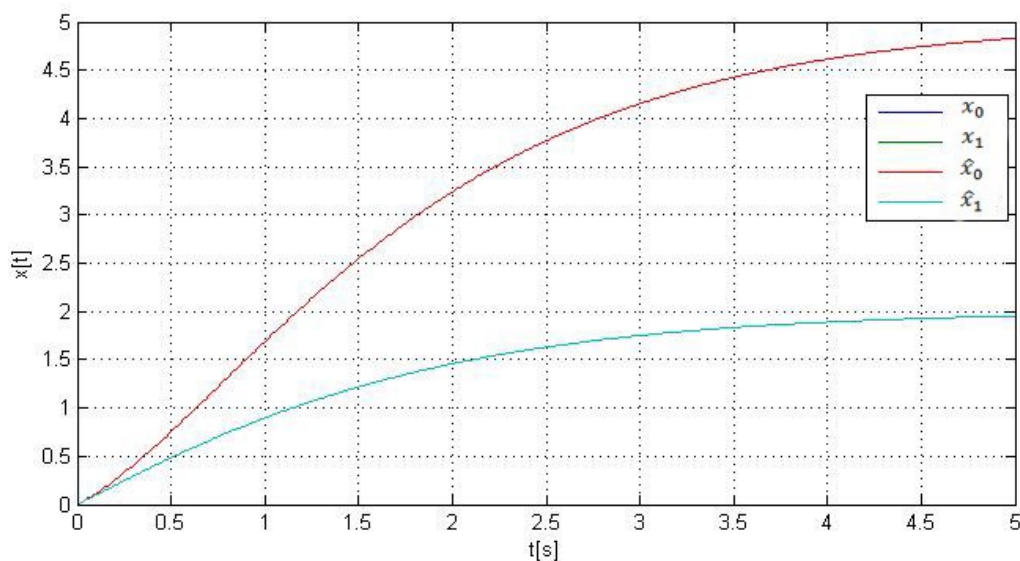
$$\mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \mathbf{Q}_{ob}^{-1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{c}_o^T) \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} 25 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 0,0667 & -0,1333 \\ -0,1667 & 0,8333 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{T}_o(\mathbf{a}_l - \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 4,2667 \\ -4,1667 \end{bmatrix}$$

Ako môžeme vidieť, vektor korekcie stavu pozorovateľa \mathbf{l} sa nám v oboch riešeniach (priame riešenie a riešenie pomocou transformačnej matice) takmer zhoduje, rozdiel je iba pri hodnote l_2 v jednej tisícine, čo je zapríčinené zaokrúhľovaním pri výpočtoch. Tento rozdiel môžeme zanedbať a teda môžeme povedať, že zhoduje sa i matica pozorovateľa \mathbf{A}_L , čím sme overili správnosť výsledku.



Obr.4.6 Priebehy stavových premenných \mathbf{x} a $\hat{\mathbf{x}}$ – príklad 2.

Návrh stavového regulátora a výstupného korektora

a) Prenos riadenia bez prekmitu $G_{wy}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$

$$\mathbf{a}_w = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

Pretože stavový model je v Jordanovom tvare, musíme pre výpočet stavového regulátora \mathbf{r} a výstupného korektora \mathbf{k} použiť transformačnú maticu \mathbf{T}_c .

$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

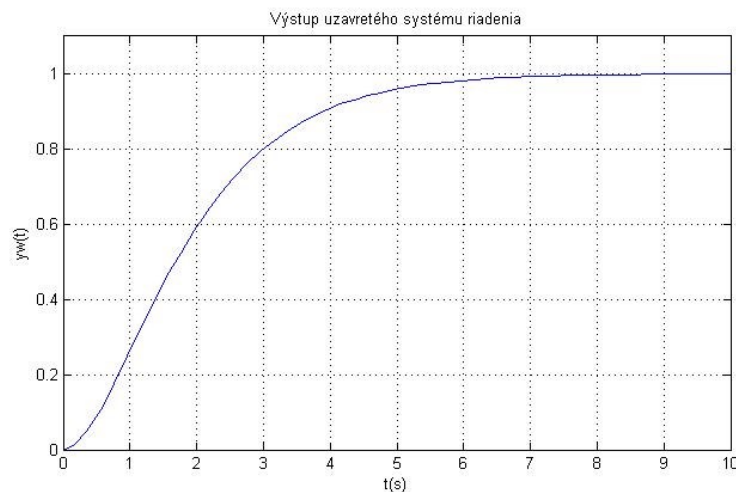
$$\mathbf{T}_c^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{T}_c}{\det \mathbf{T}_c} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{a}_w - \mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{r}_c^T = \begin{bmatrix} -9 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{b}_w - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -28 \\ -7 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{r}_c^T = \begin{bmatrix} -28 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}^T = \mathbf{r}_c^T \cdot \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T \cdot \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$



Obr.4.7 Výstup uzavretého systému riadenia – príklad 2.

Pri 5% tolerancií dosiahne riadenie ustálený stav pri čase 4,7 s.

b) Prenos riadenia s prekmítom $G_{wy}(s) = \frac{1}{s^2 + 1,4s + 1}$

$$\mathbf{a}_w = \begin{bmatrix} 1 & 1,4 \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{b}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

Pretože stavový model je v Jordanovom tvare musíme pre výpočet stavového regulátora \mathbf{r} a výstupného korektora \mathbf{k} použiť transformačnú maticu \mathbf{T}_c

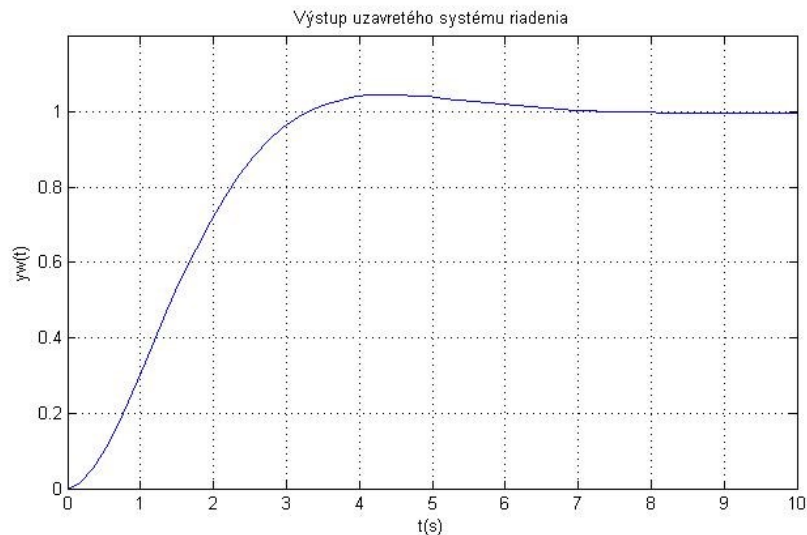
$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_c = Q_{co}(A, b)Q_{co}^{-1}(A_c, b_c) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_c^{-1} = \frac{adj T_c}{\det T_c} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$r_c = a_w - a_s = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \end{bmatrix} \rightarrow r_c^T = [-9 \quad -5] \quad k_c = b_w - b = \begin{bmatrix} -28 \\ -7 \end{bmatrix} \rightarrow r_c^T = [-28 \quad -7]$$

$$r^T = r_c^T \cdot T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0,7333 & -\frac{19}{3} \end{bmatrix} \quad k^T = k_c^T \cdot T_c^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$



Obr.4.8 Výstup uzavretého systému riadenia s prekmitom – príklad 2.

Pri 5% tolerancií dosiahne riadenie ustálený stav pri čase 2,9 s.

Záver príkladu 2:

Po určení stavovej matice A , stavovej matice vstupov b , výstupnej matice systému c^T sa overila riaditeľnosť a pozorovateľnosť modelu a následne bol určený prenos G_S . S navrhovanými prenosmi riadenia môžeme vidieť, že pri prenose riadenia s prekmitom dosiahneme požadovaný stav o 1,8 s skôr. Pri návrhu matice pozorovateľa A_L bolo cieľom aby sa nám stavový vektor podsystemu x zhodoval so stavovým vektorom Luenbergerovho pozorovateľa \hat{x} ako vidíme z obr. 4.6 vektory sa nám prekrývajú.

4.3 Príklad 3

Zadanie:

Zo zadaného stavového modelu určite stavovú maticu A , stavovú maticu vstupov b , výstupnú maticu systému c^T . Následne určite riaditeľnosť Q_{co} a pozorovateľnosť Q_{ob} daného modelu. Ak je model pozorovateľný a riaditeľný určite prenos sústavy $G_s(s)$. Vhodne zvolte prenos riadenia $G_{wy}(s)$ a následne dopočítajte parametre stavového regulátora r a korektora k . Navrhnete maticu pozorovateľa A_L . Vykreslite priebeh prenosu riadenia $G_{wy}(s)$, porovnajte priebehy vektorov stavov pozorovaného podsystemu x s Luenbergerovým pozorovateľom \hat{x} .

Daný stavový model:

$$\dot{x}_1 = x_2 + 4x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_3 + x_4 + u$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 + 2x_3 + x_4$$

$$\dot{x}_4 = 2x_1 + x_3$$

$$y = x_1 + 2x_2 + x_4$$

Určenie matíc:

A – stavová matica systému

b – stavový vektor vstupov

c^T – výstupný vektor systému

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 1] \quad d = 0$$

Overenie riaditeľnosti:

$$Q_{co} = [b, Ab, A^2b, A^3b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det Q_{co}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Systém je riaditeľný}$$

a) priame riešenie

$$A_L = A - l c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1-2l_1 & 0 & 4-l_1 \\ 1-l_2 & -2l_2 & 2 & 1-l_2 \\ -1-l_3 & -2l_3 & 2 & 1-l_3 \\ 2-l_4 & -2l_4 & 1 & -l_4 \end{bmatrix}$$

$$N_L(s) = \det(sI - A_L) = s^4 + (l_1 + 2l_2 + l_4 - 2)s^3 + (2l_1 - 3l_2 + 5l_3 + 4l_4 - 10)s^2 + (-10l_1 - 18l_2 + 8l_3 + 22)s - 4l_1 + 34l_2 - 20l_3 - 28l_4 + 2$$

$$s_0 : 4l_1 + 34l_2 - 20l_3 - 28l_4 + 2 = 10000$$

$$s_1 : -10l_1 - 18l_2 + 8l_3 + 22 = 4000$$

$$s_2 : 2l_1 - 3l_2 + 5l_3 + 4l_4 - 10 = 600$$

$$s_3 : l_1 + 2l_2 + l_4 - 2 = 40$$

$$\rightarrow l_1 = -507,9426$$

$$l_2 = 458,0235$$

$$l_3 = 892,8747$$

$$l_4 = -366,1044$$

$$A_L = A - l c^T = \begin{bmatrix} -l_1 & 1-2l_1 & 0 & 4-l_1 \\ 1-l_2 & -2l_2 & 2 & 1-l_2 \\ -1-l_3 & -2l_3 & 2 & 1-l_3 \\ 2-l_4 & -2l_4 & 1 & -l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 507,9 & 1016,9 & 0 & 511,9 \\ -457 & -916 & 2 & -457 \\ -893,9 & -1785,7 & 2 & -891,9 \\ 368,1 & 732,2 & 1 & 366,1 \end{bmatrix}$$

b) riešenie pomocou transformačnej matice

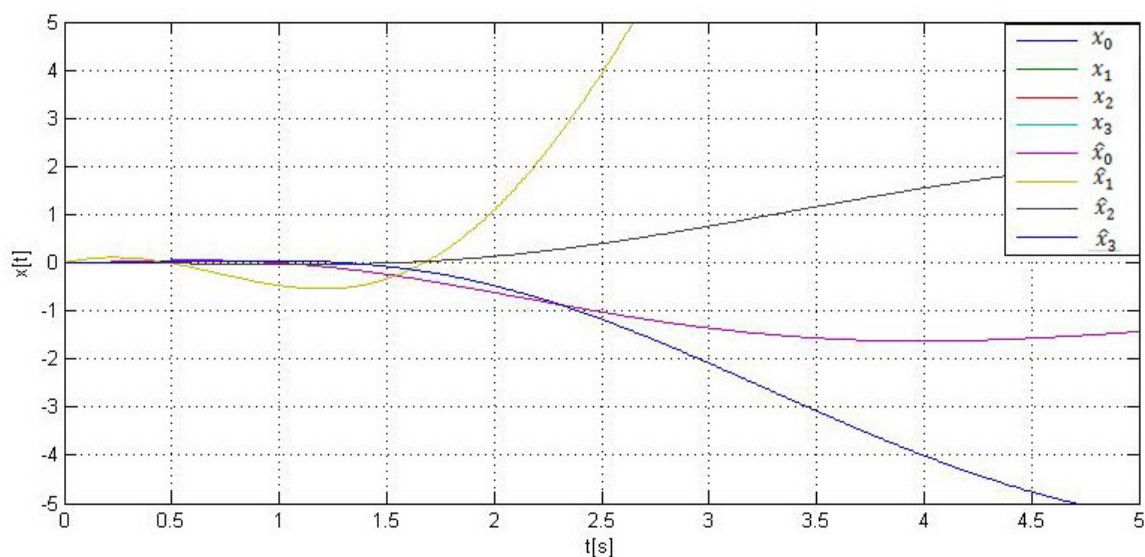
$$Q_{ob}^{-1}(A_o, c_o^T) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -10 & -2 & 1 \\ -10 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_o^{-1} = Q_{ob}^{-1}(A_o, c_o^T) Q_{ob}(A, c^T) = \begin{bmatrix} -4 & 34 & -20 & -28 \\ -10 & -18 & 8 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_o = \begin{bmatrix} -0,0013 & -0,1501 & 0,235 & -0,9765 \\ 0,0222 & 0,0522 & 0,0052 & 0,6005 \\ 0,0483 & 0,0548 & 0,3055 & 0,1305 \\ -0,0431 & 0,0457 & -0,2454 & 0,7755 \end{bmatrix}$$

$$l = T_o(a_l - a) = \begin{bmatrix} -507,9426 \\ 458,0235 \\ 892,8747 \\ -366,1044 \end{bmatrix}$$

Ako môžeme vidieť vektor korekcie stavu pozorovateľa l sa nám v oboch riešeniach (priame riešenie a riešenie pomocou transformačnej matice) zhoduje, a teda môžeme povedať, že zhoduje sa i matica pozorovateľa A_L čím sme overili správnosť výsledku.



Obr.4.10 Priebehy stavových premenných x a \hat{x} – príklad 3.

Návrh stavového regulátora a výstupného korektora

$$\text{Prenos riadenia } G_{wy}(s) = \frac{s^2 + 1s + 1}{s^4 + 2,6s^3 + 3,4s^2 + 2,6s + 1}$$

$$a_w = [1 \quad 2,6 \quad 3,6 \quad 2,6]^T \quad b_w = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^T,$$

Pretože stavový model je v Jordanovom tvare musíme pre výpočet stavového regulátora r a výstupného korektora k použiť transformačnú maticu T_c

$$Q_{co}^{-1}(A_c, b_c) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -10 & -2 & 1 \\ -10 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

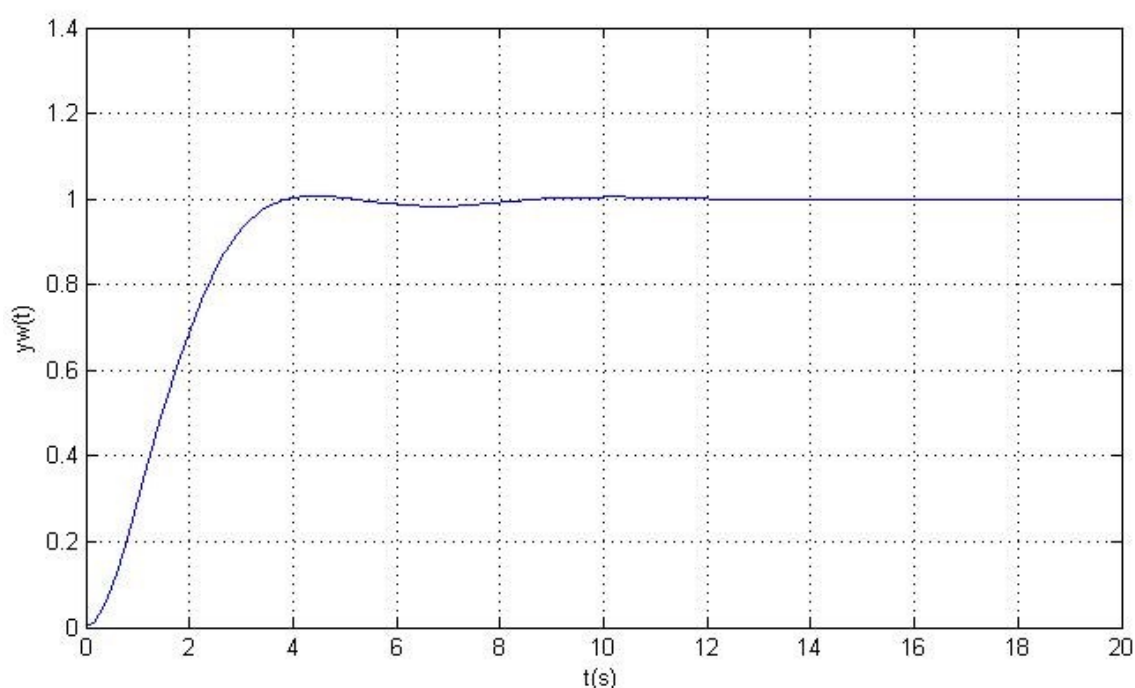
$$T_c = Q_{co}(A, b)Q_{co}^{-1}(A_c, b_c) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 20 & -9 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & -12 & -5 \\ 2 & 1 & -29 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{a}_w - \mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} -1 \\ -19,4 \\ 13,4 \\ 4,6 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{r}_c^T = [-1 \quad -19,4 \quad 13,4 \quad 4,6]$$

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{b}_w - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -33 \\ 19 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{r}_c^T = [-33 \quad 19 \quad 4 \quad -2]$$

$$\mathbf{r}^T = \mathbf{r}_c^T \cdot \mathbf{T}_c^{-1} = [22,6 \quad 4,6 \quad -195,2 \quad -64]$$

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T \cdot \mathbf{T}_c^{-1} = [0 \quad -2 \quad -19 \quad -9]$$



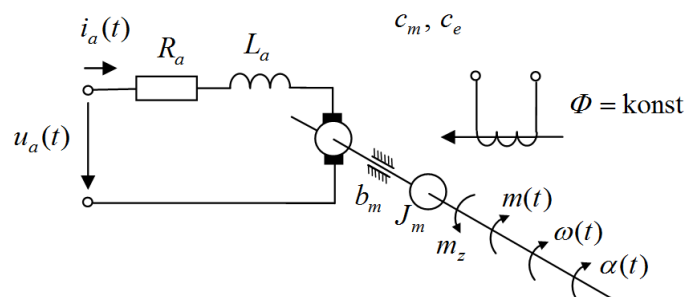
Obr.4.11 Výstup uzavretého systému riadenia – príklad 3.

Záver príkladu 3:

Po určení stavovej matice \mathbf{A} , stavovej matice vstupov \mathbf{b} , výstupnej matice systému \mathbf{c}^T sa overila riaditeľnosť a pozorovateľnosť modelu a následne bol určený prenos G_S . Pri návrhu matice pozorovateľa \mathbf{A}_L bolo cieľom aby sa nám stavový vektor podsystemu \mathbf{x} zhodoval so stavovým vektorom Luenbergerovho pozorovateľa $\hat{\mathbf{x}}$ ako vidíme z obr. 4.10 vektory sa nám prekrývajú. Navrhovaný prenos riadenia bol zvolený na základe Whiteleyho štandardných tvarov, kde sa dosiahol 10% prekmit, následnou úpravou čitateľa na uvedený tvar sme docielili zníženie prekmitu na 1%. S navrhovaným prenosom riadenia pri 5% tolerancií dosiahneme požadovanú hodnotu za 3,2 s.

4.4 Príklad 4

Majme model jednosmerného motora s cudzím konštantným buđením, ktorý môžeme vidieť na obr. 4.12



Obr. 4.12 Model jednosmerného motora

Kde J_m je celkový moment zotrvačnosti redukovaný na hriadeľ motora, $i_a(t)$ - prúd kotvy, $u_a(t)$ - napätie kotvy, R_a - celkový odpor kotvy, L_a - celková indukčnosť obvodu kotvy, b_m - koeficient viskózneho trenia, $m(t)$ - moment motora, $m_l(t)$ - záťažový moment, $\alpha(t)$ - uhol natočenia hriadeľa motora, $\omega(t)$ - uhlová rýchlosť hriadeľa motora, c_m - konštanta motora, c_e - konštanta motora, $u_e(t)$ - indukčné napätie, Φ - konštantný magnetický tok buđenja.

Na základe obr. 4.12 môžeme napísať sústavu diferenciálnych rovníc:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \omega(t),$$

$$J_m \frac{d\omega(t)}{dt} + b_m \omega(t) = m(t) - m_l(t),$$

$$m(t) = c_m i_a(t),$$

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) = u_a(t) - u_e(t),$$

$$u_e(t) = c_e \omega(t)$$

Z týchto rovníc dostaneme stavový model jednosmerného motora s konštantným cudzím buđením:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \omega(t),$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{b_m}{J_m} \omega(t) + \frac{c_m}{J_m} i_a(t) - \frac{1}{J_m} m_l(t),$$

$$\frac{di_a(t)}{dt} = -\frac{c_e}{L_a} \omega(t) - \frac{R_a}{L_a} i_a(t) + \frac{1}{L_a} u_a(t).$$

Následnou úpravou:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b_m}{J_m}x_2 + \frac{c_m}{J_m}x_3 - \frac{1}{J_m}v, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{c_e}{L_a}x_2 - \frac{R_a}{L_a}x_3 + \frac{1}{L_a}u.\end{aligned}$$

kde $x_1(t) = \alpha(t)$, $x_2(t) = \omega(t)$, $x_3(t) = i_a(t)$, $v(t) = m_l(t)$

Hodnoty parametrov:

$$J_m = 0,02 \text{ kg m}^2, \quad R_a = 1 \text{ } \Omega, \quad L_a = 0,2 \text{ H}, \quad b_m = 0,01 \text{ N m s rad}^{-1}, \quad c_m = c_e = 0,05 \text{ N m A}^{-1}, \\ m_l = 0,1$$

Zo zadaného stavového modelu určite stavovú maticu A , stavovú maticu vstupov b , výstupnú maticu systému c^T . Následne určite riaditeľnosť Q_{co} a pozorovateľnosť Q_{ob} daného modelu. Ak je model pozorovateľný a riaditeľný určite prenos sústavy $G_s(s)$. Vhodne zvolte prenos riadenia $G_{wy}(s)$ a následne dopočítajte parametre stavového regulátora r a korektora k . Navrhnete maticu pozorovateľa A_L . Vykreslite priebeh prenosu navrhnutého riadenia $G_{wy}(s)$, porovnajte priebehy vektorov stavov pozorovaného podsystemu x s Luenbergerovým pozorovateľom \hat{x} .

A – stavová matica systému

b – vektor vstupov

c^T – vektor výstupov

v – vektor poruchy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 2,5 \\ 0 & -0,25 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 0 \quad 0], \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Overenie riaditeľnosti:

$$\det Q_{co}(A, b) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 12,5 \\ 0 & 12,5 & -68,75 \\ 5 & -25 & 121,875 \end{vmatrix} = -781,25 \neq 0 \rightarrow \text{Systém je riaditeľný}$$

Overenie pozorovateľnosti:

$$\det Q_{ob}(A, c^T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 2,5 \end{vmatrix} = 2,5 \neq 0 \rightarrow \text{Systém je pozorovateľný}$$

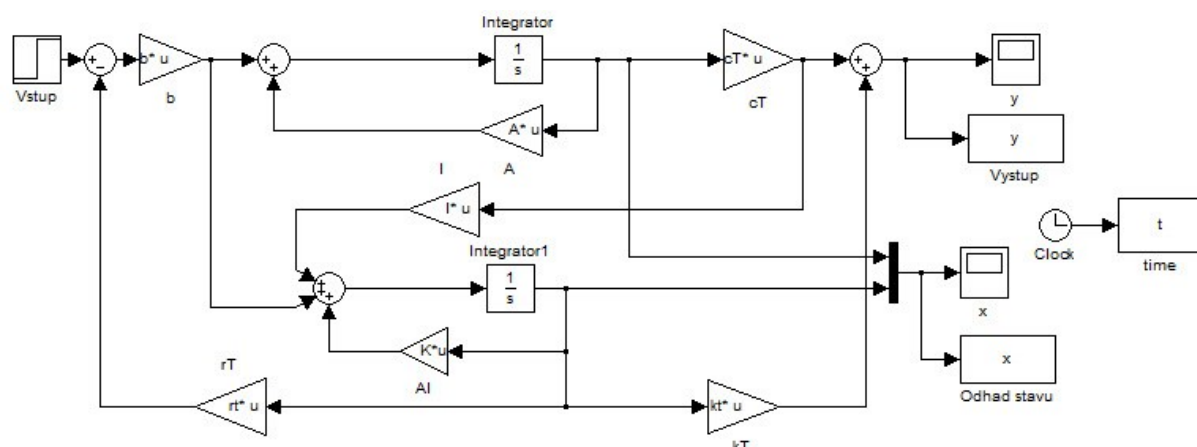
Určenie prenosu sústavy:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\det(sI - A + bc^T) - \det(sI - A)}{\det(sI - A)} + d = \frac{12,5}{s^3 + 5,5s^2 + 3,125s}$$

$$a_s = [0 \quad 3,125 \quad 5,5]^T \quad b_s = [12,5 \quad 0 \quad 0]^T,$$

korene charakteristického mnohočlena $s_1 = 0$, $s_2 = -4,8565$, $s_3 = -0,6435$

Nasledujúci obrázok obr. 4.13 predstavuje blokovú schému riadeného dynamického systému so stavovým modelom, Luenbergerovým pozorovateľom a stavovým regulátorom.



Obr.4.13 Bloková schéma modelu v programe Matlab-Simulink – príklad 4.

Určenie matice pozorovateľa:

Z charakteristického mnohočlena pozorovateľa $N_s(s)$ určíme póly pozorovaného systému $s_1 = 0$, $s_2 = -4,8565$, $s_3 = -0,6435$. Na základe vzťahu (3.18) zvolím pól pozorovateľa $p = -11$ a dostaneme charakteristický mnohočlen pozorovateľa v tvare:

$$N_L(s) = (s + 11)^3 = s^3 + 33s^2 + 363s + 1331$$

$$a_2^l = 33, \quad a_1^l = 363, \quad a_0^l = 1331$$

a) priame riešenie

$$A_L = A - l c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,5 & 2,5 \\ 0 & -0,25 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 \\ -l_2 & -0,5 & 2,5 \\ -l_3 & -0,25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$N_L(s) = \det(sI - A_L) = s^3 + (l_1 + \frac{11}{2})s^2 + (\frac{11}{2}l_1 + l_2 + \frac{25}{8})s + \frac{25}{8}l_1 + 5l_2 + \frac{5}{2}l_3$$

$$s_0 : \frac{25}{8}l_1 + 5l_2 + \frac{5}{2}l_3 = 1331$$

$$s_1 : \frac{11}{2}l_1 + l_2 + \frac{25}{8} = 363$$

$$s_2 : l_1 + \frac{11}{2} = 33$$

$$\rightarrow l_1 = 27,5$$

$$l_2 = 208,625$$

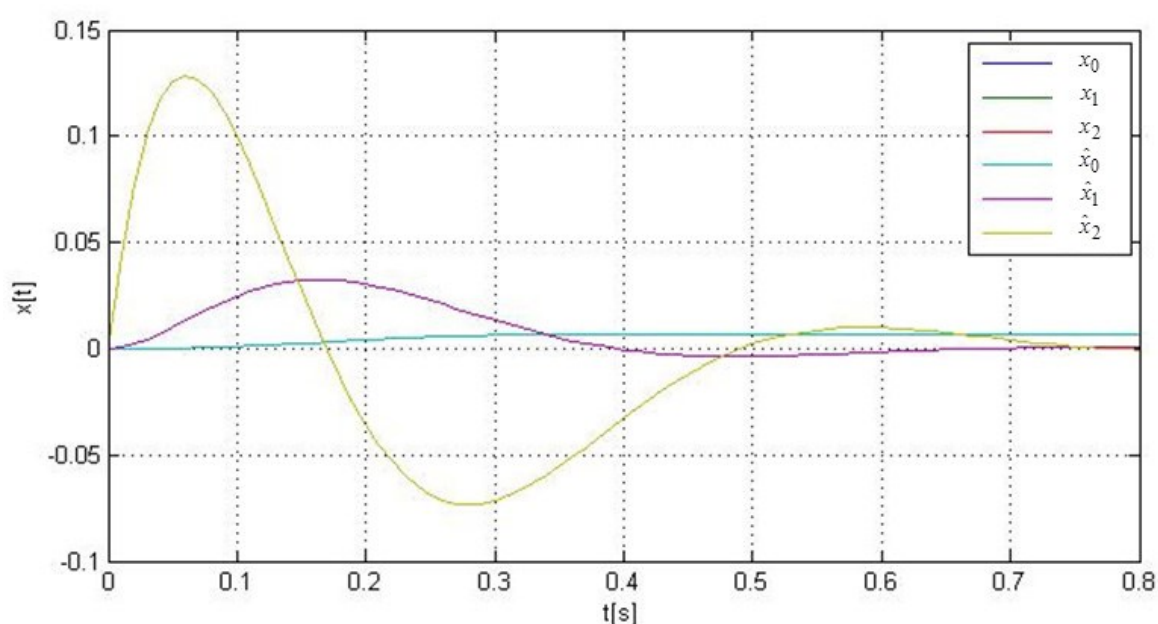
$$l_3 = 80,775$$

$$A_L = A - l c^T = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 \\ -l_2 & -0,5 & 2,5 \\ -l_3 & 0,25 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27,5 & 1 & 0 \\ -208,625 & -0,5 & 2,5 \\ -80,775 & -0,25 & -5 \end{bmatrix}$$

b) riešenie pomocou transformačnej matice

$$Q_{ob}^{-1}(A_o, c_o^T) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,125 & 5,5 & 1 \\ 5,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_o^{-1} = Q_{ob}^{-1}(A_o, c_o^T) Q_{ob}(A, c^T) = \begin{bmatrix} 3,125 & 5,5 & 2,5 \\ 5,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Obr.4.14 Priebehy stavových premenných x a \hat{x} – príklad 4.

$$T_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5,5 \\ 0,4 & -2 & 9,75 \end{bmatrix}$$

$$l = T_o(a_l - a) = \begin{bmatrix} 27,5 \\ 208,625 \\ 80,775 \end{bmatrix}$$

$$A_L = A - l c^T = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 \\ -l_2 & -0,5 & 2,5 \\ -l_3 & 0,25 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27,5 & 1 & 0 \\ -208,625 & -0,5 & 2,5 \\ -80,775 & -0,25 & -5 \end{bmatrix}$$

Ako môžeme vidieť na obr. 4.17 priebehy stavových premenných x a \hat{x} , sa nám prekrývajú čím sme overili správnosť výsledku.

Návrh stavového regulátora a výstupného korektora

$$\text{Prenos riadenia } G_{wy}(s) = \frac{1953,13}{s^3 + 25s^2 + 312,5s + 1953,13}$$

$$\mathbf{a}_w = [1953,13 \quad 312,5 \quad 25]^T \quad \mathbf{b}_w = [1953,13 \quad 0 \quad 0]^T,$$

Výpočet transformačnej matice \mathbf{T}_c

$$\mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,125 & 5,5 & 1 \\ 5,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

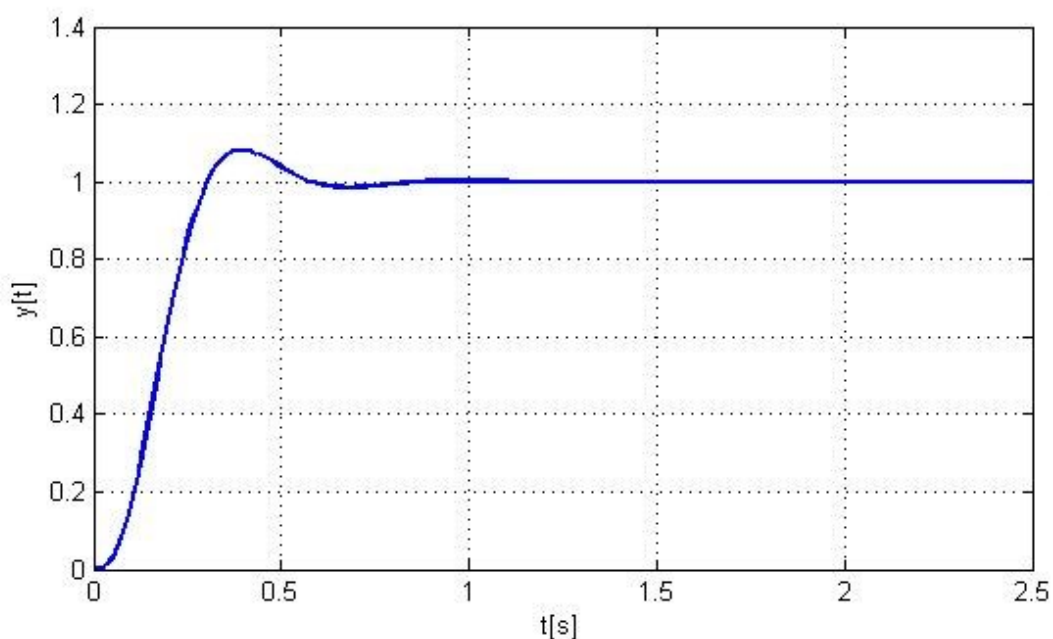
$$\mathbf{T}_c = \mathbf{Q}_{co}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \mathbf{Q}_{co}^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \begin{bmatrix} 12,5 & 0 & 0 \\ 0 & 12,5 & 0 \\ 0 & 2,5 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0,08 & 0 & 0 \\ 0 & 0,08 & 0 \\ 0 & -0,04 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{a}_w - \mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} 1935,13 \\ 309,375 \\ 19,5 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{r}_c^T = [1935,13 \quad 309,375 \quad 19,5]$$

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{b}_w - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1940,63 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{k}_c^T = [1940,63 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{r}^T = \mathbf{r}_c^T \cdot \mathbf{T}_c^{-1} = [156,25 \quad 239,7 \quad 3,9]$$

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T \cdot \mathbf{T}_c^{-1} = [155,25 \quad 0 \quad 0]$$



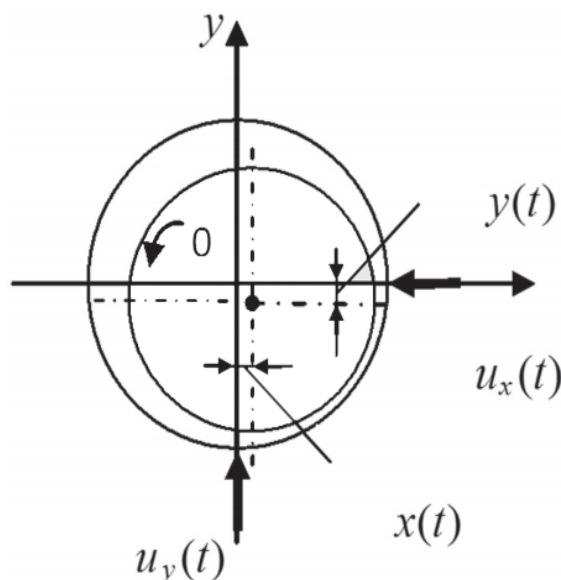
Obr.4.15 Výstup uzavretého systému riadenia – príklad 4.

Záver príkladu 4:

Z modelu jednosmerného motora s cudzím konštantným budením určíme stavovú maticu A , stavovú maticu vstupov b , výstupnú maticu systému c^T a poruchový vektor v . Následne sa overila riaditeľnosť a pozorovateľnosť modelu a bol určený prenos G_S . Pri návrhu matice pozorovateľa A_L bolo cieľom aby sa nám stavový vektor podsystemu x zhodoval so stavovým vektorom Luenbergerovho pozorovateľa \hat{x} ako vidíme z obr. 4.14 vektory sa nám prekrývajú. S navrhovaným prenosom riadenia sme dosiahli 8% prekmit a pri tolerancií 5% dosiahneme požadovanú hodnotu za 0,5 s. Poruchová veličina bola zanedbaná, pri pôsobení poruchovej veličiny v stavovom riadení vzniká trvalá regulačná odchýlka, ktorú môžeme odstrániť pomocou pozorovateľa poruchy.

4.5 Príklad 5

Príklad sa zaoberá stabilitou rotora uloženého v klzných ložiskách pri rýchlobežných rotačných strojoch. Nestabilita rotora je spôsobená olejovým filmom, ktorý pri určitej uhlovej rýchlosti rotora spôsobuje jeho bočné vibrácie, ktoré nie sú v súlade so silami od nevyvážky, prípadne od iných vonkajších periodických síl, pretože ich frekvencie je menšia ako polovica frekvencie otáčania. [Vítečková, Víteček, Tůma, 2012]



Obr.4.16 Čap rotora v klznom ložisku [Vítečková, Víteček, Tůma, 2012]

Zadanie:

Majme zjednodušený nelineárny matematický model tuhého rotora uloženého v klznom ložisku za predpokladu, že v pohybovej rovnici sa prejavuje iba jeho hmotnosť a vlastnosť olejového filmu obr.4.16, ktorého vlastnosti môžu mať v stacionárnych súradniciach tvar:

$$M\ddot{x}(t) + D(\varepsilon)\dot{x}(t) + K(\varepsilon)x(t) = -u_x(t) - D(\varepsilon)\lambda(\varepsilon)\Omega y(t) + mr\Omega^2 \cos \Omega t$$

$$M\ddot{y}(t) + D(\varepsilon)\dot{y}(t) + K(\varepsilon)y(t) = -u_y(t) + D(\varepsilon)\lambda(\varepsilon)\Omega x(t) - Mg + mr\Omega^2 \sin \Omega t$$

$$K(\varepsilon) = K_0(1 - e^2)^{-n}, \quad D(\varepsilon) = D_0(1 - e^2)^{-n}, \quad 0,5 \leq n \leq 3$$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0(1 - e^2)^b, \quad 0 < b < 1$$

$$e = \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Kde M - celková hmotnosť, D - zobecnený koeficient tlmenia, K - zobecnený koeficient tuhosti, λ - rýchlostný pomer strednej obvodovej rýchlosti oleja, Ω - uhľová rýchlosť rotora, x - horizontálne posunutie stredu rotora, y - vertikálne posunutie stredu rotora, m - nevyvážok rotora, r - polomer na ktorom pôsobí nevyvážok, u_x - horizontálna sila akčného člena, u_y - vertikálna sila akčného člena, g - tiažové zrýchlenie, e - relatívna radiálna excentricita, c - radiálna vôľ'a.

Matematický model vyjadríme v stavových súradniciach:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{D(\varepsilon)}{M}x_2 - \frac{K(\varepsilon)x_1}{M} - \frac{D(\varepsilon)\lambda(\varepsilon)\Omega x_3}{M} + \frac{mr\Omega^2 \cos \Omega}{M} - \frac{u_x}{M}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{D(\varepsilon)}{M}x_4 - \frac{K(\varepsilon)}{M}x_3 + \frac{D(\varepsilon)\lambda(\varepsilon)\Omega x_1}{M} - g + \frac{mr\Omega^2 \sin \Omega t}{M} - \frac{u_y}{M}$$

$$x = x_1$$

$$y = x_3$$

$$e = \frac{1}{c} \sqrt{x_1^2 + x_3^2}$$

Pre mocnitéľov $n=b=0$ je matematický model lineárny a platí: $K = K_0$, $D = D_0$, $\lambda = \lambda_0$

Hodnoty parametrov:

$M = 1,6 \text{ kg}$; $\lambda = 0,475$; $D = 1000 \text{ N s m}^{-1}$; $K = 4000 \text{ N m}^{-1}$; $mr = 0,00001 \text{ kg m}$; $b = 0,1$; $n = 2$.

Kritická hodnota uhlovej rýchlosti rotora:

$$\Omega_k = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Cieľom regulácie je:

$$x(t) \rightarrow x_w(t) = 0, y(t) \rightarrow y_w(t) = 0$$

Sily od nevyvážky a gravitácie sú vyjadrené pomocou poruchy:

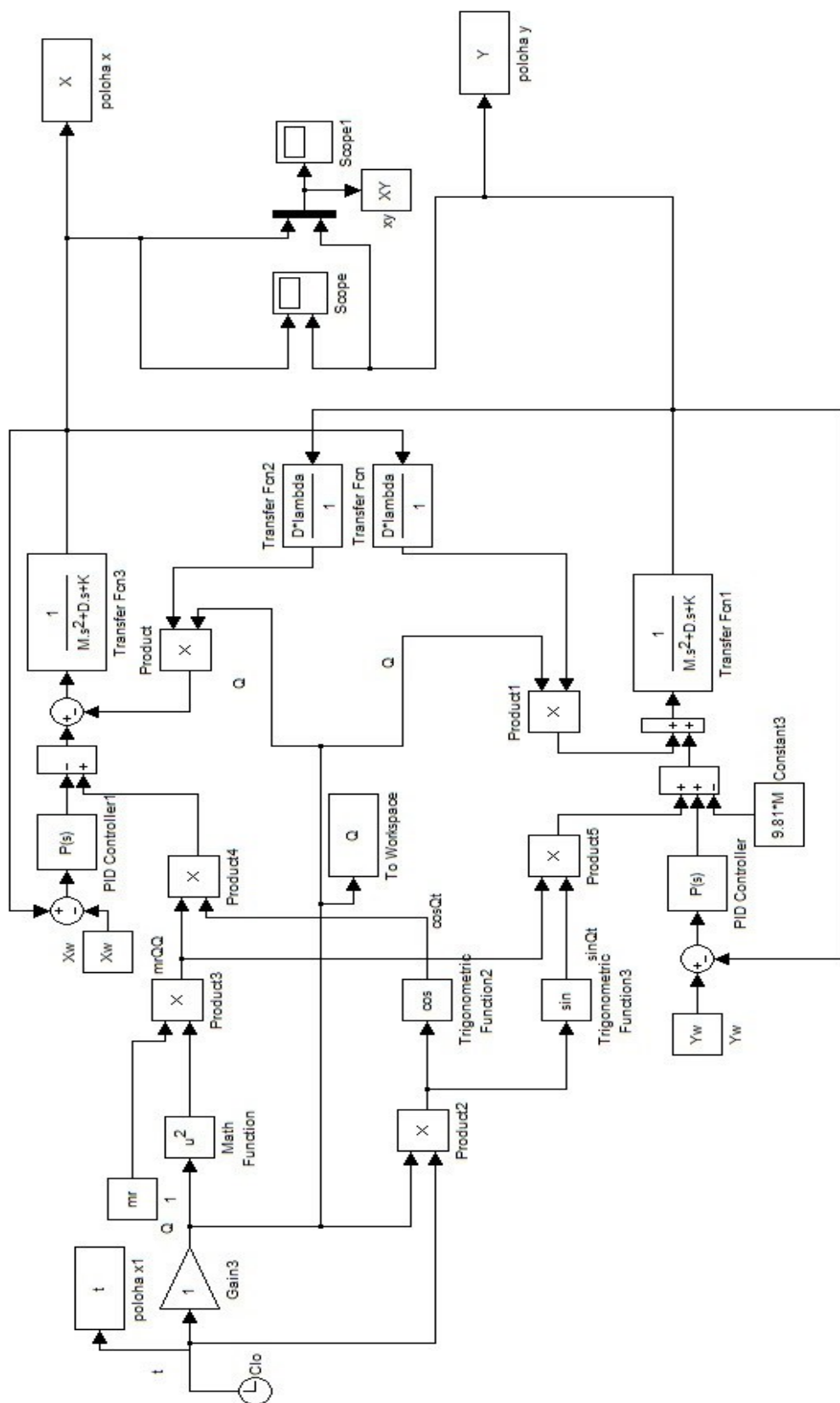
$$v_x(t) = mr\Omega^2 \cos(\Omega t)$$

$$v_y(t) = mr\Omega^2 \sin(\Omega t) - Mg$$

Prah stability obmedzuje významným spôsobom maximálnu uhlovú rýchlosť rotora, preto sa hľadajú spôsoby, ktoré docelia zvýšenie prahu stability a tým i vyššiu maximálnu uhlovú rýchlosť. Pasívne spôsoby spočívajú v rôznych úpravách ložiska z hľadiska tvaru i mazania. Aktívne spôsoby využívajú silové pôsobenie na rotor. [Vítečková, Víteček, Tůma, 2012]

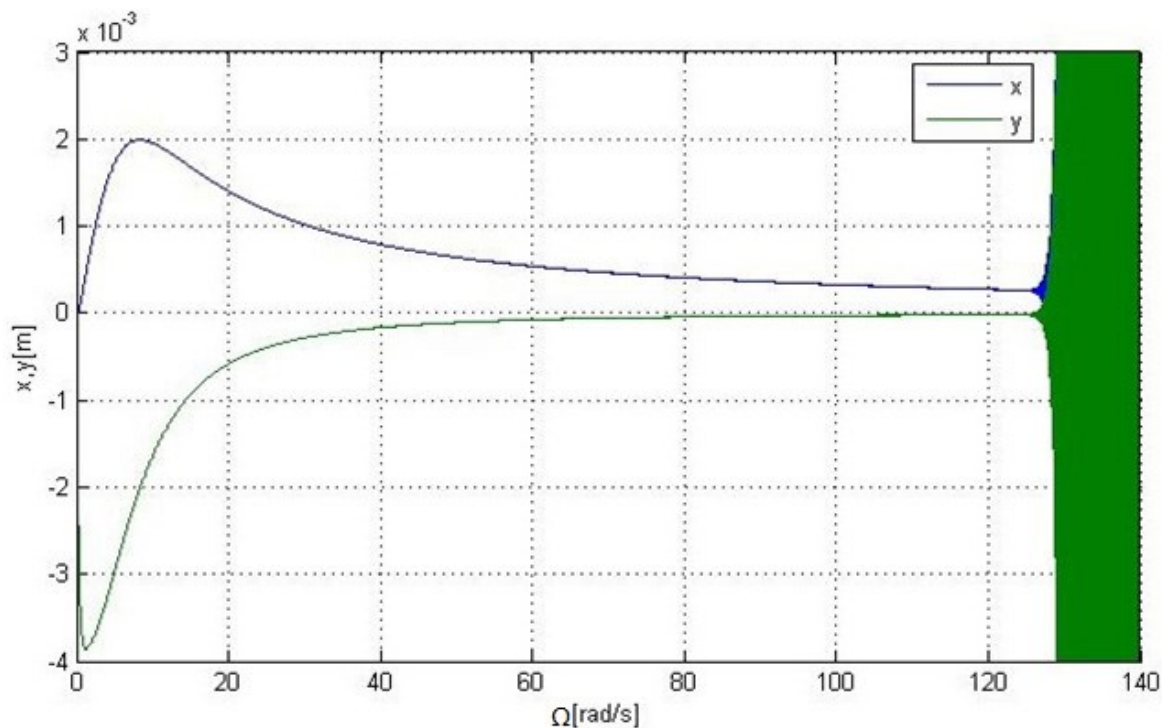
Jednou z možností aktívneho zvýšenia prahu stability a teda i uhlovej rýchlosti rotora je používanie dvojrozmerového regulačného obvodu.

Na obr. 4.17 je bloková schéma lineárneho matematického modelu sústavy rotor-ložisko.

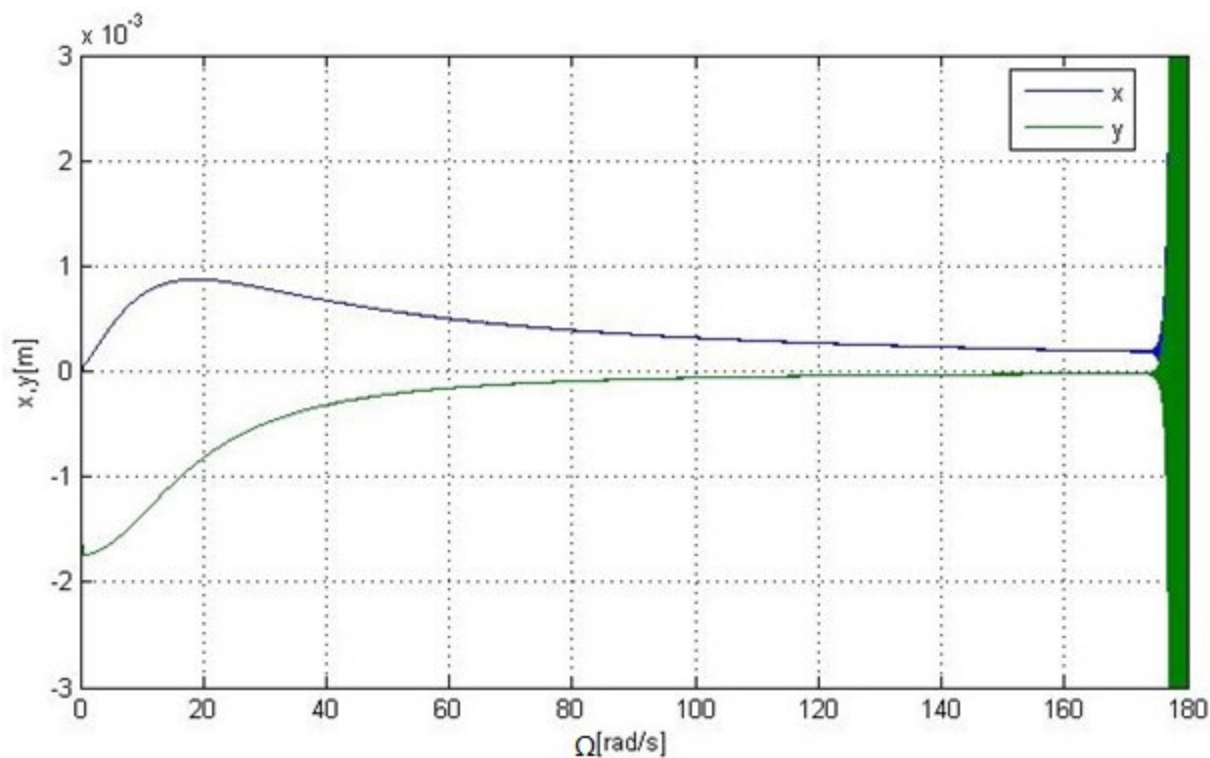


Obr.4.17 Lineárny dvojrozmerný regulačný obvod v prostredí Matlab-Simulink – príklad 5.

Pri simulácii bol uvažovaný lineárny nárast uhlovej rýchlosti rotora. Simuláciu lineárneho dvojrozmerného regulačného obvodu sme realizovali bez regulátora a s regulátorom typu P. Ako môžete vidieť na nasledujúcich obrázkoch, obr. 4.18 a obr. 4.19, pri požití regulátora sme docielili zvýšenie prahu stability rotora.



Obr. 4.18 Prah stability rotora bez použitia regulácie – príklad 5.



Obr. 4.19 Prah stability rotora pri použití regulátora P: $k_p=5000$ – príklad 5.

Ďalšou možnosťou aktívneho zvýšenia prahu stability rotora môže byť použitie stavového riadenia. Pri výpočte stavových matic bola použitá kritická hodnota uhlovej rýchlosti Ω , avšak pri návrhu blokovej schémy sme nemohli použiť schému z obr. 3.4 pretože v matici A vystupuje uhlová rýchlosť Ω , ktorá nie je konštantná. Preto bola bloková schéma daného stavového modelu rozpracovaná na jednotlivé stavy ako môžeme vidieť na obr. 4.20.

Výpočet stavových matic pre kritickú hodnotu uhlovej rýchlosti Ω

Určenie matic:

A – stavová matica systému

B – stavová matica vstupov

C – výstupná matica systému

F – matica poruchy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K(\varepsilon)}{M} & -\frac{D(\varepsilon)}{M} & -\frac{D(\varepsilon)\lambda(\varepsilon)\Omega}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{D(\varepsilon)\lambda(\varepsilon)\Omega}{M} & 0 & -\frac{K(\varepsilon)}{M} & -\frac{D(\varepsilon)}{M} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Overenie riaditeľnosti:

$$Q_{co} = [B, AB, A^2B, A^3B] = \begin{bmatrix} \text{stĺpce 1 až 4} & & & \\ 0 & 0 & -0,625 & 0 \\ -0,625 & 0 & -390,625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,625 \\ 0 & -0,625 & 0 & -390,625 \\ \text{stĺpce 5 až 8} & & & \\ -390,625 & 0 & -242578,125 & 19531,125 \\ 242578,125 & 19531,125 & -150634765,625 & 0 \\ 0 & 390,625 & -19531,125 & -242578,125 \\ -19531,125 & -242578,125 & 0 & 150634765,625 \end{bmatrix}$$

Riaditeľnosť overíme pomocou príkazu *rank* v programe Matlab,

$$\text{rank}Q_{co}(A, b) = 4 \rightarrow \text{Systém je riaditeľný}$$

Overenie pozorovateľnosti:

$$\mathbf{Q}_{ob} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2500 & 625 & -31250 & 0 \\ 31250 & 0 & -2500 & -625 \\ -1562500 & 388125 & -19531250 & -31250 \\ -19531250 & 31250 & 1562500 & 388125 \end{bmatrix}$$

Riaditeľnosť overíme pomocou hodnosti matice, príkazom *rank* v Matlabe.

$\text{rank } \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = 4 \rightarrow$ Systém je **pozorovateľný**

Určenie prenosovej matice:

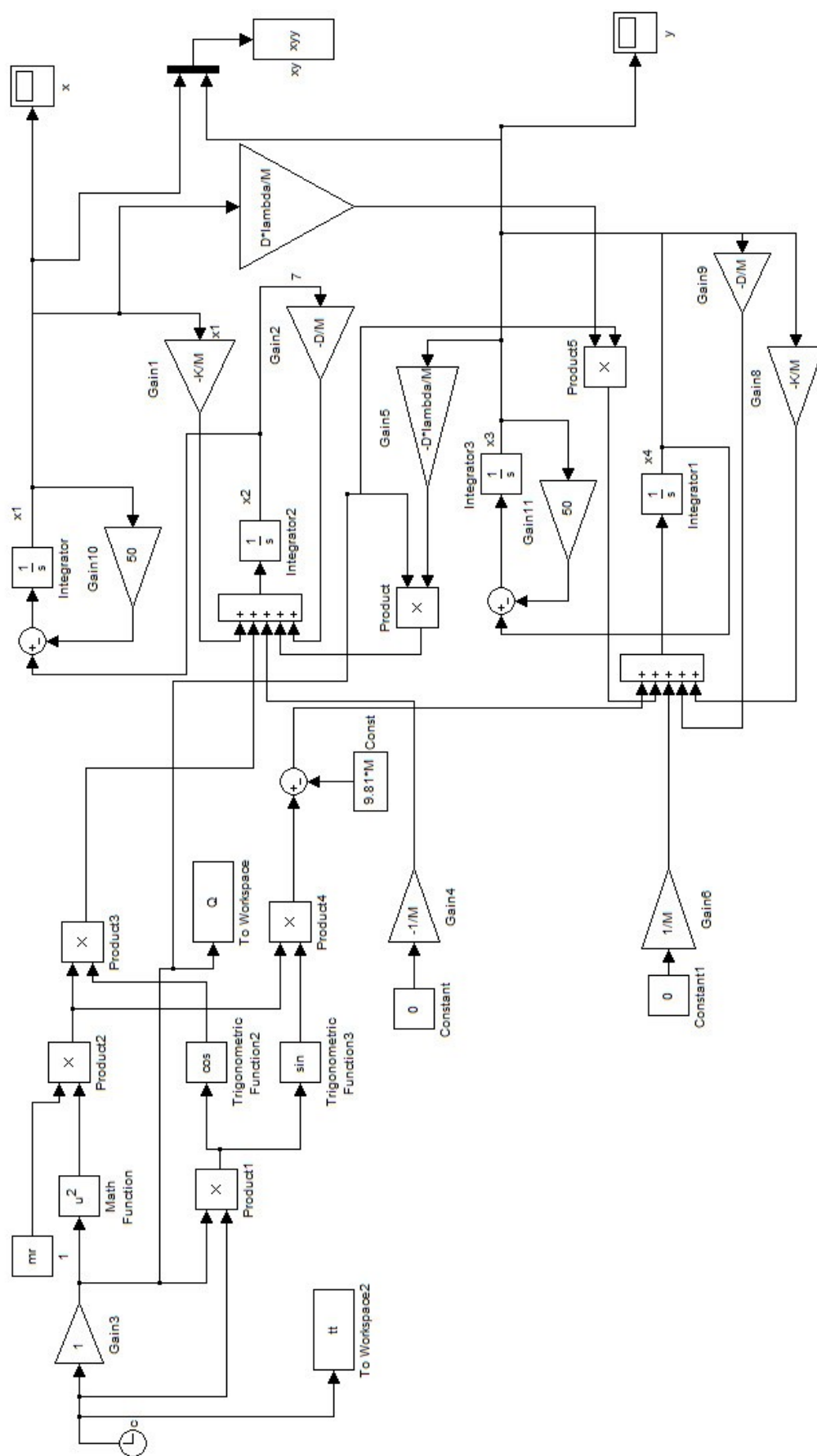
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} =$$

Stĺpec 1

$$= -\frac{5(s^2 + 625s + 2500)}{8(s^4 + 1250s^3 + 395625s^2 + 3125000s + 982812500)} - \frac{78125}{4(s^4 + 1250s^3 + 395625s^2 + 3125000s + 982812500)}$$

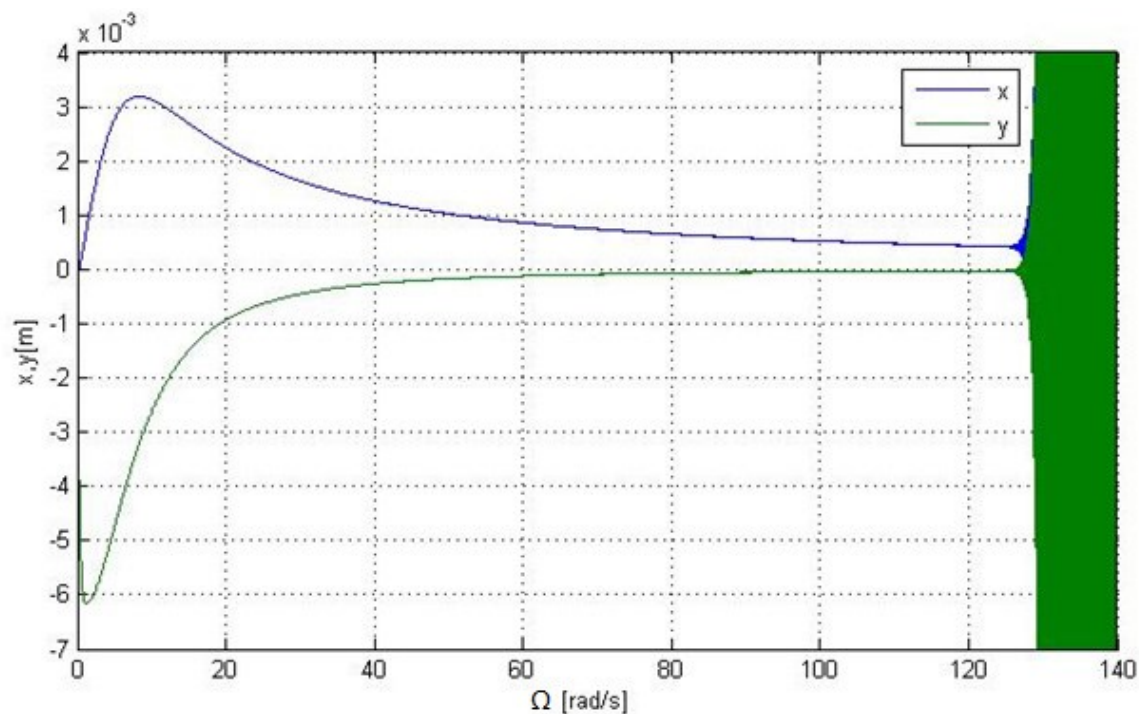
Stĺpec 2

$$-\frac{78125}{4(s^4 + 1250s^3 + 395625s^2 + 3125000s + 982812500)} - \frac{5(s^2 + 625s + 2500)}{8(s^4 + 1250s^3 + 395625s^2 + 3125000s + 982812500)}$$

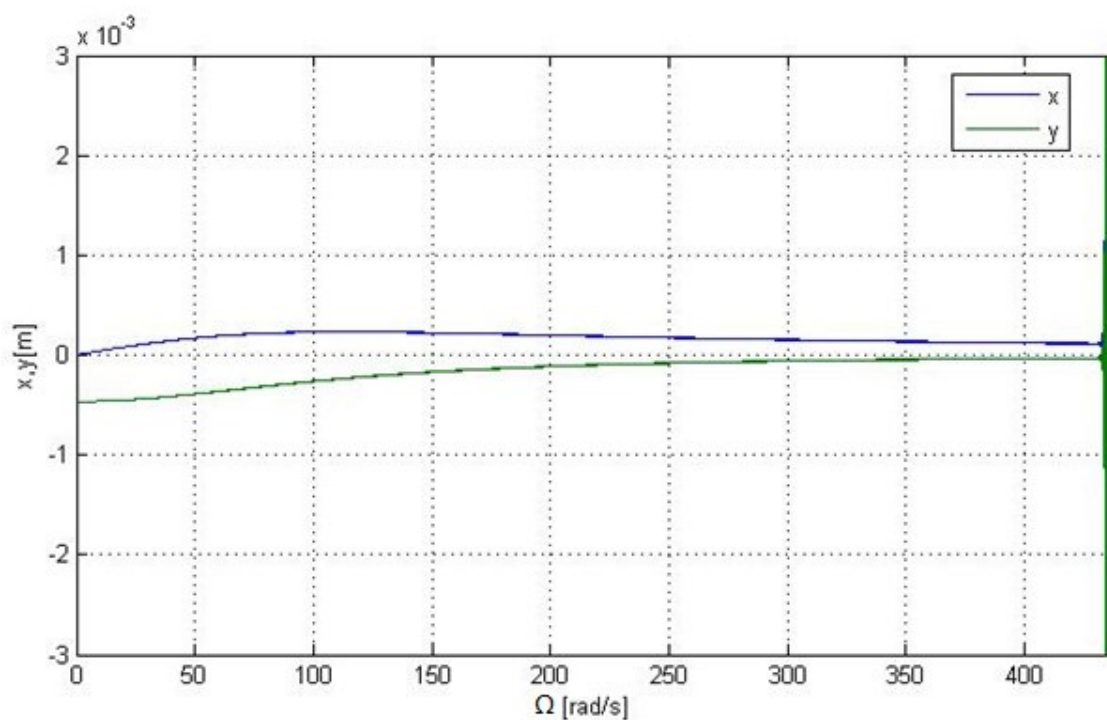


Obr. 4.20 Bloková schéma stavového riadenia pre stabilizáciu rotora – príklad 5.

Pri simulácii bol opäť uvažovaný lineárny nárast uhlovej rýchlosti rotora. Simuláciu stavového riadenia sme realizovali bez spätnej väzby a so spätnou väzbou, priebehy jednotlivých závislostí sú zobrazené na obr.4.21 a obr. 4.22. Parametre regulátora pri riadení so spätnou väzbou boli určené experimentálnou metódou.



Obr. 4.21 Prah stability rotora pri stavovom riadení bez spätnej väzby – príklad 5.



Obr. 4.21 Prah stability rotora pri stavovom riadení so spätnou väzbou, $k_{px}=k_{py}=50$

– príklad 5.

Záver príkladu 5:

Stabilizácia rotora uloženého v klzných ložiskách bola realizovaná jednak pomocou lineárneho dvorozmerového regulačného obvodu, v druhom prípade pomocou stavového riadenia. Pri riadení realizovanom pomocou lineárneho dvojrozmerového regulačného obvodu môžeme na obr.4.18 a 4.19 vidieť že pri použití regulátora sa nám kritická uhlová rýchlosť zvýši zo 125 rad/s na 173 rad/s. Pri stavovom riadení môžeme z obr. 4.21 a obr. 4.22 vidieť že kritická uhlová rýchlosť sa pri použití regulátora v spätnej väzbe zvýšila zo 125 rad/s na 430 rad/s. Pri stavovom riadení nám v stavovej matici vystupovala veličina uhlovej rýchlosti, ktorá nebola konštantná. Preto sme nemohli použiť pri simulácii blokovú schému z obr. 3.4, museli sme si schému navrhnuť po jednotlivých prvkoch stavového vektora, čím sme docielili premenlivú hodnotu uhlovej rýchlosti. Parametre regulátora boli určené experimentálnou metódou.

5. Záver

V rámci diplomovej práce som sa snažil priblížiť problematiku spojitého stavového riadenia pre jednorozmerové i mnohorožmerové systémy. V úvode je popis základných kanonických tvarov stavových matematických modelov pre jednorozmerové i mnohorožmerové systémy, konkrétne sú zmieňované základné kanonické tvary riaditeľnosti, pozorovateľnosti, riadenia, pozorovania a pre jednorozmerové systémy i Jordanov kanonický tvar. Následne sú popísané možné prístupy návrhu pozorovateľa pomocou priamej metódy a pomocou transformačnej matice T_o , postup návrhu stavového regulátora a korektora.

Cieľom bol návrh a simulačné overenie stavového riadenia pre zvolené dynamické podsystemy. Pri jednorozmerových systémoch bola z navrhnutých stavových modelov určená stavová matica A , stavová matica vstupov b , výstupná matica systému c^T . Na základe týchto matíc bola overená riaditeľnosť a pozorovateľnosť modelu a následne bol určený prenos sústavy G_S . Určil sa požadovaný prenos riadenia G_{wy} na základe ktorého sa vypočítali hodnoty regulátora a korektora. V prvých dvoch stavových modeloch boli zvolené dva prenosi riadenia, jeden bez prekmitu a druhý s prekmitom. Pri treťom príklade bol použitý prenos s prekmitom aby sa docielil čo najkratší čas dosiahnutia požadovanej hodnoty. Pri použití prenosu riadenia s prekmitom sa docieli požadovaná hodnota za kratší čas. V štvrtom príklade si na základe diferenciálnych rovníc popisujúcich jednosmerný motor s konštantným cudzím budením, zostavíme stavový model, určíme stavové matice. Po overení riaditeľnosti a pozorovateľnosti sme dopočítali parametre regulátora a korektora pre požadovaný prenos riadenia G_{wy} . Pri návrhu matice pozorovateľa A_L bolo cieľom aby sa nám stavový vektor podsystemu x zhodoval so stavovým vektorom Luenbergerovho pozorovateľa \hat{x} , ako môžeme vidieť na obr. 4.2, obr. 4.6, obr. 4.10 a 4.14 vektory sa nám prekrývajú. Piaty príklad sa zaoberá stabilitou rotora uloženého v klzných ložiskách pri rýchlobežných rotačných strojoch. Výsledkom je porovnanie stavového riadenia s použitým dvojrožmerovým regulačným obvodom. Ako môžeme vidieť z priebehov na obr. 4.19 a obr. 4.21 pri použití stavového riadenia sme docielili zvýšenie hodnoty kritickej uhlovej rýchlosti z 173 rad/s na hodnotu 430 rad/s.

Výpočty a simulácie boli realizované pomocou prostredia Matlab verzia R2009b.

Stavové riadenie môžeme uplatniť všade tam, kde sú kladené vysoké nároky na kvalitu riadenia. Môžeme ho použiť na dosiahnutie lepších výsledkov ako pri klasickej regulácii prípadne na riadenie nestabilných systémov. Nevýhodou je, že pri poruchovej veličine vzniká pri stavovom riadení trvalá regulačná odchýlka, ktorú síce môžeme odstrániť pomocou pozorovateľa poruchy, avšak tento postup je zložitejší pri porovnaní s klasickou reguláciou.

Zoznam použitej literatúry:

BALÁTĚ, J. *Automatické řízení*. Praha: Nakladatelství BEN, 2003 654 s. ISBN 80-7300-020-2

CHEN, CH. T. *Analog and Digital Control Systems Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods*. New York – Oxford University Press, 1993, ISBN 978-0-19-531046-7

KACZOREK, T., DZIELIŃSKI, A., DABROWSKI, W., ŁOPATKA, R. *Podstawy teorii sterowania*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo – Techniczne Warszawa, 2005. ISBN 83-204-2967-6

STREJC, V. *Stavová teorie lineárního diskrétního řízení*. Praha: Nakladatelství ČSAV, 1978, Vydání 1. - 376s

ŠTECHA, I. & HAVLENA, V. *Teorie dynamických systému*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1999. ISBN 80-01-00941-6

ŠULC, B., VÍTEČKOVÁ, M. *Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-01-03007-5

ŠVARC, I., ŠEDA, M., VÍTEČKOVÁ, M. *Automatické řízení*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, VUT v Brně, 2007, ISBN 978-80-214-4398-3

VÍTEČEK, A., VÍTEČKOVÁ, M., *Zpětnovazební řízení mechatronických systémů*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2013, 1. Vydání. ISBN 978-80-248-3232-6

VÍTEČEK, A., TŮMA, J., VÍTEČKOVÁ M.. *Stabilizace rotoru uloženého v kluzném ložisku*. *Acta Mechanica Slovaca*. No 3-B/2008. Ročník 12, Strojnická fakulta TU v Košicích, Košice, Slovenská republika, str. 899-906. ISSN 1335-2393

VÍTEČKOVÁ, M., VÍTEČEK, A. *Návrh pozorovatele u jednorozměrového lineárního dynamického pod systému* (nepublikované podklady)

VÍTEČKOVÁ M., VÍTEČEK, A. *Základní kanonické tvary stavových modelů jednorozměrových lineárních dynamických systémů*. In *Principia Cybernetica* 2005.Ostrava : VŠB-TU Ostrava, 7. – 9. 9. 2005, s. 237 - 245. ISBN 80-248-0773-4 (60+40)

VÍTEČKOVÁ M., VÍTEČEK, A. Návrh stavového řízení u jednorozměrového lineárního dynamického pod systému. *In Principia Cybernetica 2005*. Ostrava : VŠB-TU Ostrava, 7. – 9. 9. 2005, s. 247- 255. ISBN 80-248-0773-4 (60+40)

VÍTEČKOVÁ M., VÍTEČEK, A., TŮMA, J. Active Control of Rotor Vibrations. *In 10th International Conference PROCESS CONTROL 2012*. Kouty nad Desnou, Czech Republic. June 12-15, 2012. str. C037-1/C037-5. ISBN 978-80-7395-500-7